

# Relativiteit en sterrenkunde

Hans Klein Woud, 31 mei 2024



# Inhoud

- Relativiteit: Einstein, Lorentz, Minkowski
- Speciale Relativiteitstheorie (SRT)
  - Tijddilatatie, lengtecontractie, gelijktijdigheid
  - Roodverschuiving
  - Massa-energie equivalentie
- Algemene Relativiteitstheorie (ART)
  - Inleiding
  - Schwarzschild geometrie, ruimtekromming, tijd en massa-invloed
  - Klassieke en Relativistische banen
  - Klassieke en Relativistische zwaartekracht
  - Gravitatielenzen
  - Gravitatiegolven
  - Licht van verre sterrenstelsels
- Literatuur



# Twee Theorieën

## ■ Speciale Relativiteitstheorie (SRT)

- Beschrijft voor een vlakke ruimte, zonder versnellingen, de invloed van snelheid op het gedrag van klokken (tijd) en lengtes (ruimte)
- Ruimte en tijd blijken geen onafhankelijke zaken, maar zijn gekoppeld tot **ruimtetijd**; de wereld is 4-dimensionaal: 3 ruimtedimensies en 1 tijddimensie
- Naar verhouding eenvoudige theorie; met middelbare school wiskunde te begrijpen
- In 1905 door Einstein gepubliceerd

## ■ Algemene Relativiteitstheorie (ART)

- De theorie van de zwaartekracht, waarbij ruimtetijd vervormd blijkt te worden door massa en energie
- Best complex: geavanceerde wiskunde (o.a. tensorrekening) nodig
- In 1915 gepubliceerd

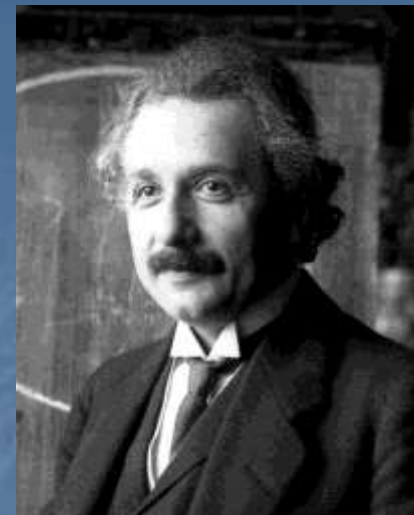


# Relativiteit

- Einstein ontwikkelde de Relativiteitstheorie,
  - In 1905 publicatie van Speciale Relativiteitstheorie (SRT)
  - In 1915 volgde Algemene Relativiteitstheorie (ART), maar.....
- Lorentz gaf aanzet tot relativiteitstheorie
  - Lorentz factor (waarmee lengtecontractie bepaald kan worden) gevonden, niet de juiste verklaring
  - Ook: lichtsnelheid is maximaal haalbare snelheid
- Minkowski leverde belangrijke bijdrage
  - Vierdimensionale ruimtetijd werd door hem al in 1905 bedacht
  - Aanvankelijk vond Einstein dat onnodige complexiteit
  - Later maakte hij er uitgebreid gebruik van bij de ontwikkeling van ART



# Albert Einstein

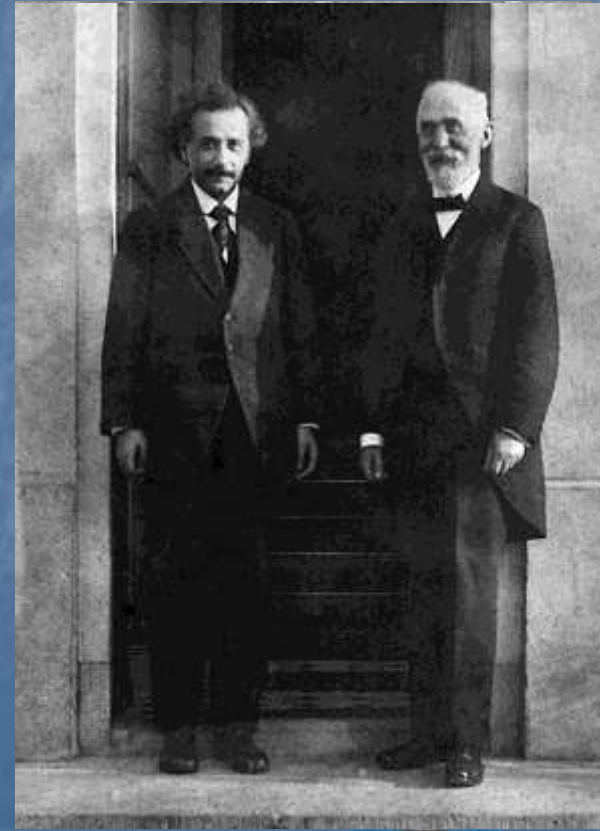


- Einstein: 1879 Ulm – 1955 Princeton
- Vanaf 1901 Zwitserland: o.a. Patentbureau Bern en hoogleraar ETH - Zürich
- 1905 Speciale Relativiteitstheorie (SRT)
- 1907 Equivalentie van massa en energie:  $E = m \cdot c^2$
- 1914 Duitsland: o.a. hoogleraar en directeur Instituut voor Natuurkunde Berlijn
- 1915 Algemene Relativiteitstheorie (ART)
- 1921 Nobelprijs voor de natuurkunde voor de verklaring van foto-elektrisch effect
- 1933 naar VS vanwege NAZI's; 1940 naturalisatie VS burger
- Nog veel andere natuurkundige bijdragen, o.a. Brownse beweging, kosmologie, kwantummechanica



# Hendrik Antoon Lorentz

- Lorentz: 1853 Arnhem- 1928 Haarlem, natuurkundige, hoogleraar in Leiden
- Onderzoek naar elektromagnetische eigenschappen van materie
- 1902 Nobelprijs samen met Zeeman: invloed magnetisme op spectraallijnen
- Afmetingen van voorwerpen afhankelijk van hun snelheid: lengtecontractie
- Lichtsnelheid is maximale snelheid
- Daarmee basis gelegd voor SRT
- Einstein onder de indruk van zijn werk



# Hermann Minkowski

- Minkowski: 1864 Aleksotas (Litauwen) – 1908 Göttingen
- Wiskundige, hoogleraar in o.a. Zürich en Göttingen
- Onderzoek op gebied van getaltheorie, natuurkunde en relativiteit
- Introduceerde:
  - vierdimensionale ruimtetijd in plaats van driedimensionale ruimte onafhankelijk van absolute tijd
  - Minkowski interval als invariante grootheid
- Zijn theorie blijkt gelijkwaardig aan SRT van Einstein



*H. Minkowski*

# Lichtsnelheid

- Natuurkundigen veronderstelden dat er ether in het heelal nodig was om licht te transporteren
- Michelson en Morley hebben rond 1887 experiment gedaan om invloed van ether op lichtsnelheid te bepalen
- Er bleek geen reden te zijn om ether aan te nemen en de gemeten lichtsnelheid bleek steeds dezelfde te zijn
- Alle latere experimenten hebben dit bevestigd
  
- Lichtsnelheid  $c$  in vacuüm blijkt bijna 300.000 km/s te zijn
- **Exacte** lichtsnelheid: **299.792,458 km/s**





# Speciale Relativiteitstheorie

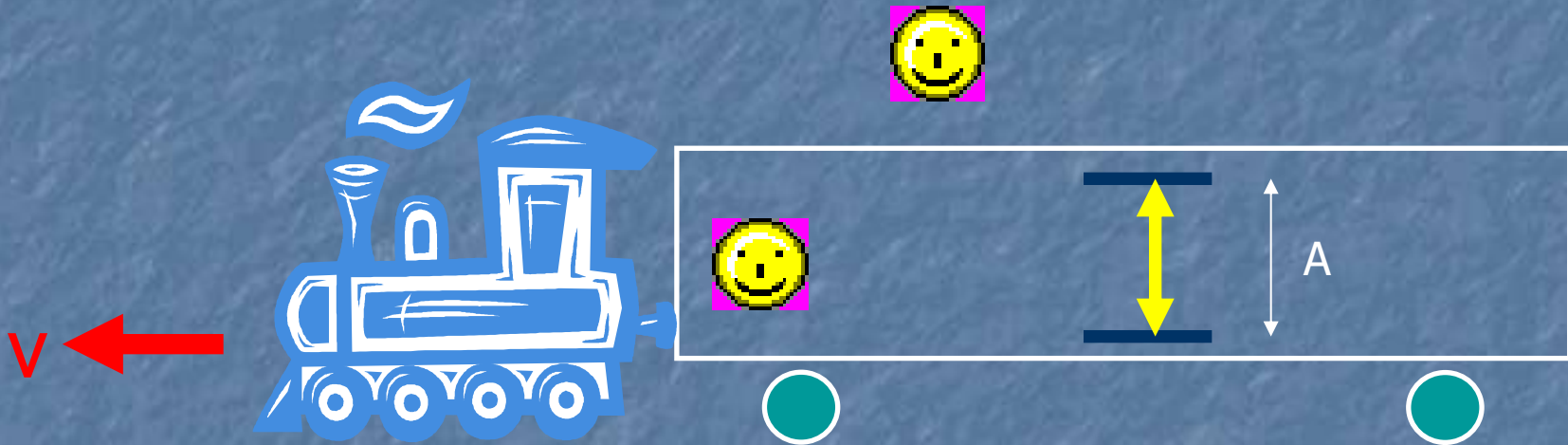
- SRT is gebaseerd op twee postulaten\*:
  - Alle natuurwetten zijn dezelfde in alle inertiaal-systemen (systemen met constante snelheid en zonder zwaartekracht)
  - Lichtsnelheid is voor iedere waarnemer dezelfde, onafhankelijk van zijn snelheid t.o.v. de bron
- Laatste uitspraak komt overeen met Michelson – Morley experiment, maar.....:
- Einstein kende dit experiment niet, maar kwam tot zijn postulaten op basis van elektrodynamica (Wetten van Maxwell)

\*Postulaat: nog niet bewezen stelling



# SRT: Tijddilatatie (tijdvertraging)

- Een met **snelheid  $v$**  rijdende trein heeft een waarnemer aan boord
- Buiten de trein een tweede stilstaande waarnemer



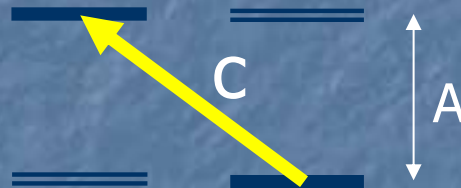
- Tussen twee spiegels, op afstand  $A$ , wordt lichtflits weerkaatst: klok  
Wat ziet de **waarnemer** in de trein?
- Deze ziet lichtflits verticaal verplaatsen
- Eén tik  $Dt$  is gelijk aan tijd nodig voor lichtflits, om afstand  $A$  met lichtsnelheid  $c$  af te leggen, dus  $Dt = A/c$   
 $Dt$  is de tijd volgens de met de klok **meebewegende waarnemer**



# SRT: Tijddilatatie (2)

Wat ziet **waarnemer** buiten de trein?

- Lichtflits beweegt niet verticaal maar door treinsnelheid schuin naar boven
- Lichtflits legt de afstand  $C$  af ( $C > A$ )
- Lichtsnelheid  $c$  is invariant, dus een tik duurt  $\Delta t = C/c$  \*
- Omdat  $C$  groter is dan  $A$  is  $\Delta t$  groter dan  $D t$



- $\Delta t$  is tijd waargenomen door **stilstaande waarnemer**
- Blijkbaar duurt een tik  $D t$  in het **bewegende systeem** dus korter dan een tik  $\Delta t$  gezien vanuit het **stilstaande systeem**.

**Bewegende klokken lopen langzamer**



# SRT: Tijddilatatie (3)

- *In de dagelijkse praktijk* heeft men het idee dat de tijd absoluut is. Voor iedereen lijkt het tijdsverloop tussen twee gebeurtenissen hetzelfde, maar:
- *In (werkelijke) relativistische wereld* is tijd relatief. Een t.o.v. waarnemer bewegende klok loopt langzamer dan zijn eigen stilstaande klok

$$Dt = g \cdot D t$$

$$\text{waarbij } g = \frac{Dt}{D t} = \frac{dt}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{Lorentzfactor} \geq 1$$

- De tijd zoals aangegeven door een, t.o.v. de waarnemer, **stilstaande** klok noemt men de "**eigen tijd**" ("**proper time**")
- De "eigen tijd" geeft altijd het kortst mogelijke tijdsinterval tussen twee gebeurtenissen

*Bewegende klokken lopen langzamer*



# Assenstelsel in Klassieke Natuurkunde

- In klassieke natuurkunde is afstand tussen 2 punten onafhankelijk van het coördinatenstelsel:
  - In  $x, y, z$  - stelsel is afstand tussen twee punten (stelling van Pythagoras):
$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
  - In ander  $x', y', z'$ - stelsel is die afstand even groot:
$$dl'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dl^2$$
  - De tijd is in beide stelsels gelijk:  $t = t'$

Klassiek zijn ruimte en tijd gescheiden zaken



# Minkowski interval

- In werkelijke relativistische wereld van SRT is dat anders:
  - Dan is  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  niet meer gelijk in ieder stelsel
  - In systeem met  $t, x, y, z$ - coördinaten is Minkowski interval (ruimtetijdafstand) tussen twee gebeurtenissen:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

- In ander  $t', x', y', z'$ -systeem is die afstand even groot\*:

$$ds'^2 = -c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = ds^2 = \text{invariant}$$

- Ruimte en tijd blijken gekoppeld te zijn: **ruimtetijd**
- Tijd en lengtes hoeven in de twee systemen niet gelijk te zijn
- Volledige SRT kan hiermee afgeleid worden
- Einstein vond dit aanvankelijk onnodig complex, maar...  
**gebruikte de methodiek wel voor afleiding van ART**

\* Ook in bolcoördinaten  $(t, r, \theta, \varphi)$  volgt dezelfde ruimtetijdafstand:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi dj^2$$



# Afleiding tijddilatatie, vlak heelal

alleen voor liefhebbers

- Minkowski interval:

$$-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \text{invariant} = \text{gelijk in ieder stelsel}$$

- Kies voor zelfde ruimtetijd verplaatsing ander 'stelsel' met snelheid t.o.v. eerste stelsel zodanig dat  $dx', dy',$  en  $dz' = 0$

- Dan volgt:  $-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -cdt'^2$

- Een waarnemer meebewegend met dit 'stelsel' ervaart de tijd  $t'$  als zijn eigentijd  $t' = \tau$  en dus volgt:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

- Of anders geschreven:  $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}$

- Nu is  $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dl^2$  en  $dl/dt = v =$  snelheid

- Dus volgt voor tijddilatatie:  $\frac{d\tau}{dt} = g = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Bewegende klok met  $\tau$  loopt langzamer dan klok  $t$



# SRT: Lengtecontractie, Gelijktijdigheid

- De factor  $g = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  noemt men de Lorentzfactor  $\geq 1$

- Op dezelfde manier kan afgeleid worden dat bewegende lengtes in de bewegingsrichting korter worden: **lengtecontractie**

$$L_{\text{bewegend}} = \frac{L_{\text{stilstand}}}{g} = L_{\text{stilstand}} \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

- De stilstaande lengte ("proper length") is de grootste lengte die het object kan hebben
- Verder is aantoonbaar dat een gelijktijdige gebeurtenis in een coördinatenstelsel, in een ander bewegend coördinatenstelsel niet meer gelijktijdig zal zijn:

**Gelijktijdigheid is een relatief begrip**





# SRT: Tijddilatatie voorbeelden

## Voorbeeld 1

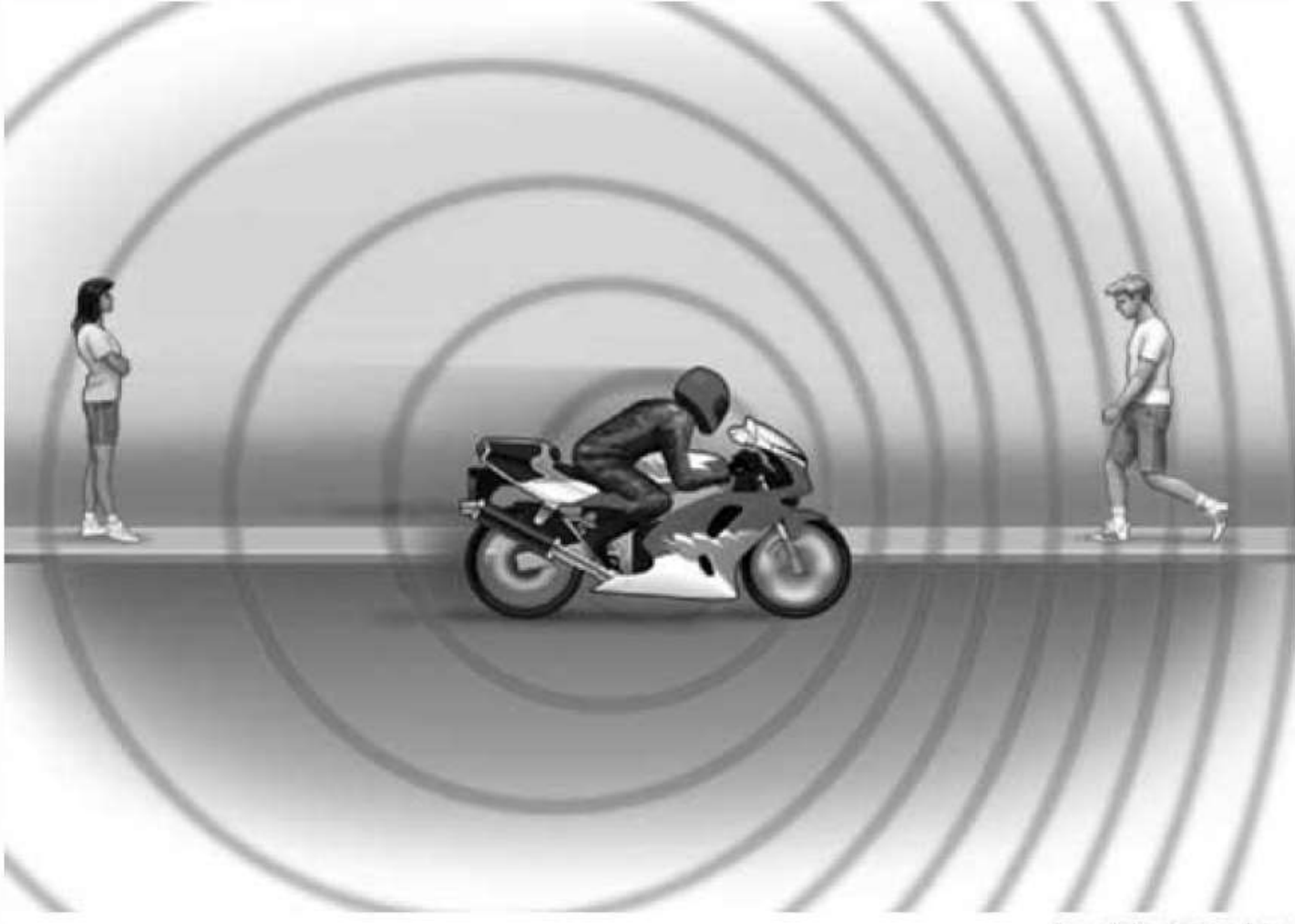
- Maximale snelheid Joint Strike Fighter (F35): 1913 km/h = 0,53 km/s (Mach 1.6)
- T.o.v. de lichtsnelheid van 300.000 km/s nog steeds vrijwel stilstand
- **1 uur** in het bewegende vliegtuig is dan **1,000.000.000.001.6 uur** voor de stilstaande waarnemer
- Tijddilatatie speelt in onze "*langzame*" wereld dus geen echte rol

## Voorbeeld 2

- Tijddilatatie wordt pas merkbaar bij relativistische snelheden in de orde van grootte van de lichtsnelheid
- Bij een snelheid 0,6 maal de lichtsnelheid:  $v = 0,6 \cdot c$  wordt **1 uur** in het bewegende systeem **1,25 uur** voor de stilstaande waarnemer
- **De bewegende waarnemer wordt dus minder snel oud dan de stilstaande waarnemer**



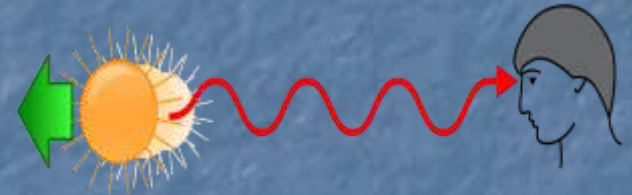
# Doppler-effect



# Lichtgolven - Roodverschuiving

- Ook licht heeft Dopplereffect: **snelheidsroodverschuiving**
- Bij zich verwijderende bron worden golflengtes langer, richting rode deel spectrum

*Roodverschuiving*



- Bij naderende bron worden golflengtes korter, richting blauwe deel spectrum

*Blauwverschuiving*



- Meestal is er sprake van zich verwijderende bron, dus:

*Roodverschuiving*



# Spectroscopie

- Meeste sterrenkundige kennis is gebaseerd op meten en analyse van licht, bijv: sterlmagnitudes
- Met spectroscopie meet men samenstelling van licht: welke golflengtes zijn aanwezig; hiermee kan ontzettend veel informatie gevonden worden
- Als voorbeeld: om snelheden te bepalen wordt roodverschuiving gemeten
- Roodverschuiving:  $z = \frac{\text{toename golflengte}}{\text{golflengte}}$
- Door snelheid treedt roodverschuiving op
- Bij lage snelheden blijkt  $z = v / c$  een goede benadering te zijn
- Daarmee is verwijderingssnelheid te bepalen:  $v = zc$



# SRT: Roodverschuiving

- Maar bij relativistische snelheden is de gegeven benadering onjuist.
- Volgens SRT, moet tijddilatatie dan in rekening gebracht worden. Dat levert, (in plaats van  $z = v/c$ ):

$$z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} - 1$$

- **Voorbeeld:** men meet roodverschuiving  $z = 0,4$
- Met de dan onjuiste benadering volgt:  $v = 0,4c$
- Terwijl het juiste antwoord is:

$$v = 0,324c$$



# SRT: Energie

- In klassieke natuurkunde zijn massa en energie verschillende dingen

- Volgens SRT zijn massa en energie equivalent:

Massa kan omgezet worden in energie

en

omgekeerd\*

- Massa  $m$  blijkt overeen te komen met energie  $mc^2$

Massa – Energie Equivalentie:  $E = mc^2$

\* Bij de oerknal was er aanvankelijk alleen energie, kort daarna ontstond pas massa



# SRT: Massa – Energie Equivalentie

- **Voorbeeld: kernfusie in de zon**
- In centrum van zon fuseren 4 waterstof atomen tot 1 helium atoom
- Helium atoom is ongeveer 0,7 % lichter dan 4 waterstofatomen
- Per seconde wordt circa 700 miljoen ton waterstof omgezet in 696 miljoen ton helium.
- Het massaverschil van 4,3 miljoen ton/s komt vrij als energie:

$$E = mc^2 = 4,3 \times 10^9 \text{ (kg/s)} \times (3.0 \times 10^8 \text{ (m/s)})^2$$
$$= 3,84 \times 10^{26} \text{ Watt}$$

- Dat is de Lichtkracht van de zon



# Algemene Relativiteitstheorie (ART)

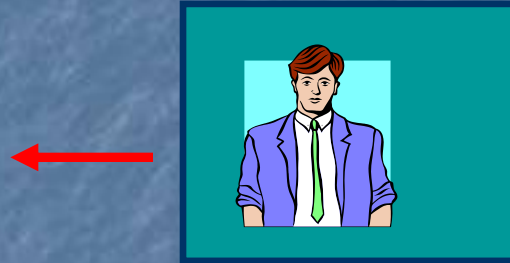
- SRT geldt voor inertiaalsystemen
  - die met constante snelheid t.o.v. elkaar bewegen
  - er is geen zwaartekracht of versnelling van het systeem
- SRT dus maar beperkt geldig
  
- ART geldt voor alle systemen
  - versnellend of vertragend
  - met zwaartekrachtveld
- Einsteins uitgangspunt: natuurwetten zijn ook voor versnellende systemen altijd dezelfde
  
- ART is "theorie" van zwaartekracht
- Zwaartekracht is natuurkracht die het minst begrepen is



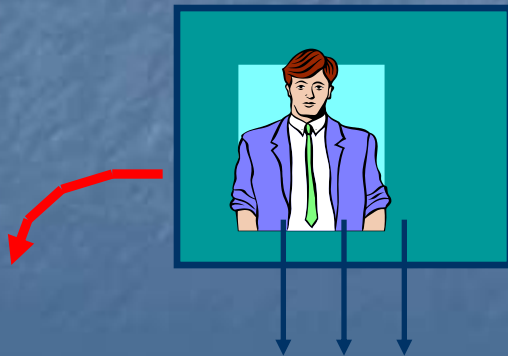


# Inertiaal en vrijvallend systeem

- Waarnemer bevindt zich in raamloos laboratorium
- Er is geen zwaartekracht en snelheid is constant



- Waarnemer voelt geen krachten (hij zweeft); hij constateert dat hij zich in inertiaalsysteem bevindt
- Vervolgens komt laboratorium in zwaartekrachtveld en is vrijvallend



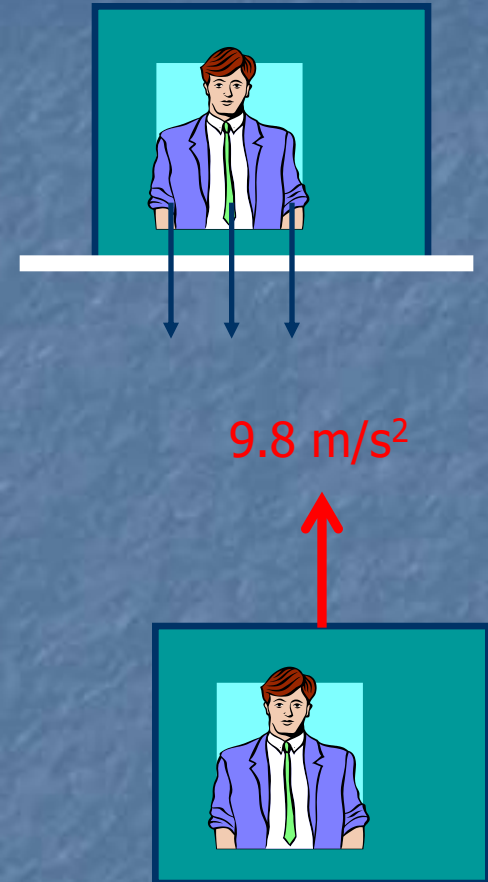
- Waarnemer ondervindt geen verschil
- Hij blijft zweven en constateert nog steeds een inertiaalsysteem

**Conclusie: Inertiaal en vrijvallende systemen zijn equivalent**



# Zwaartekracht en versnelling

- Laboratorium bevindt zich in rust op aarde
- Waarnemer voelt zwaartekracht, hij heeft gewicht van 80 kg en alles in lab valt naar beneden
- Laboratorium bevindt zich in de ruimte en versnelt met  $9,8 \text{ m/s}^2$
- Waarnemer constateert weer dat hij 80 kg weegt en dat alles naar beneden valt



## Conclusie

Zwaartekracht en versnelling zijn equivalent



# Basis van ART

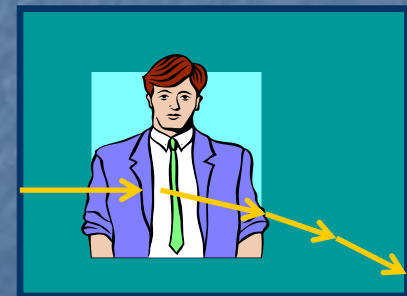
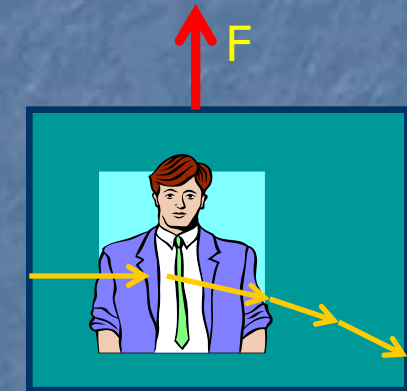
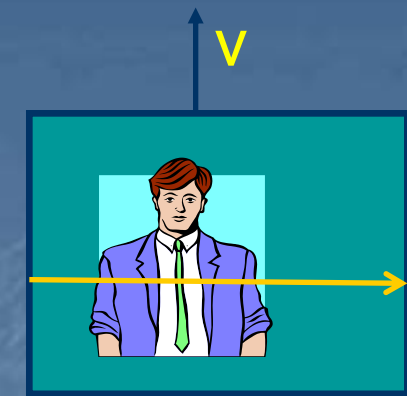
- Inertiaal en vrijvallende systemen zijn equivalent (gelijkwaardig)
  - SRT is in beide gevallen van toepassing
- Zwaartekracht en versnelling zijn equivalent
- Natuurwetten zijn in alle systemen dezelfde



# ART en licht

- Licht volgt kortste weg. Klassiek: rechte lijn
- Laboratorium in ruimte, heeft verticale snelheid  $v$ , geen zwaartekracht
  - lichtstraal van links naar rechts volgt rechte lijn
- Laboratorium wordt door kracht  $F$  omhoog versneld
  - Door versnelling heeft laboratorium bij aankomst van lichtstraal aan rechterzijde hogere plaats: lichtstraal is naar beneden afgebogen
- Laboratorium bevindt zich in rust in zwaartekrachtveld
  - Versnelling en zwaartekracht zijn gelijkwaardig, dus ook nu buigt lichtstraal naar beneden

Zowel licht als massa worden door zwaartekracht aangetrokken

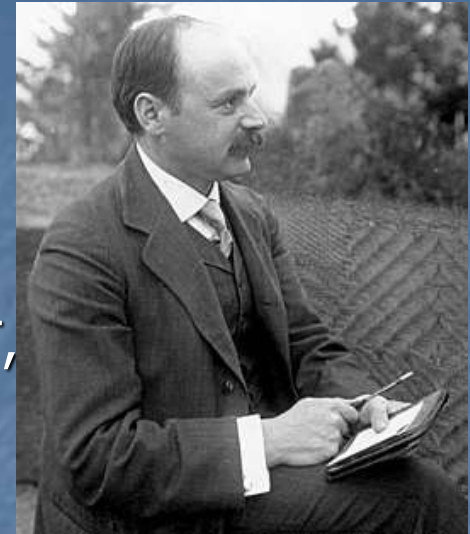


# ART, Schwarzschild geometrie

- Karl Schwarzschild (1873 – 1916) was eerste, die kort na Einstein's publicatie van ART, nog in 1915 oplossing van ART voor bolvormige massa vond
- **Schwarzschild geometrie**: eenvoudigste geval van ART, dat invloed van zwaartekracht op tijd en ruimte rond bol met massa  $M$  beschrijft
- Dat is zogenaamde **Schwarzschild metriek**, met vergelijkbare eigenschappen als het Minkowski interval (in bolcoördinaten):

$$ds^2 = -\left(1 - R_s / r\right) c^2 dt^2 + \left(1 - R_s / r\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi dj^2$$

- T.o.v. Minkowski interval is er zowel bij tijd  $t$  als straal  $r$  een extra term:  $1 - R_s / r$ , waarbij  $R_s = 2GM / c^2 =$  Schwarzschildstraal
- Schwarzschildstraal beschrijft bol (**zwart gat**) van waaruit niets kan ontsnappen; alle massa of fotonen die naar binnen vallen kunnen er nooit meer uit



# ART: Schwarzschild en ruimtekromming

$$ds^2 = -\left(1 - R_s / r\right) c^2 dt^2 + \left(1 - R_s / r\right)^{-1} dr^2 + r^2 dq^2 + r^2 \sin^2 q dj^2$$

- Beschouw een vast tijdstip ( $dt = 0$ ) en varieer ruimtelijk alleen de straal ( $dq = dj = 0$ ) dan volgt:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - R_s / r\right)}$$

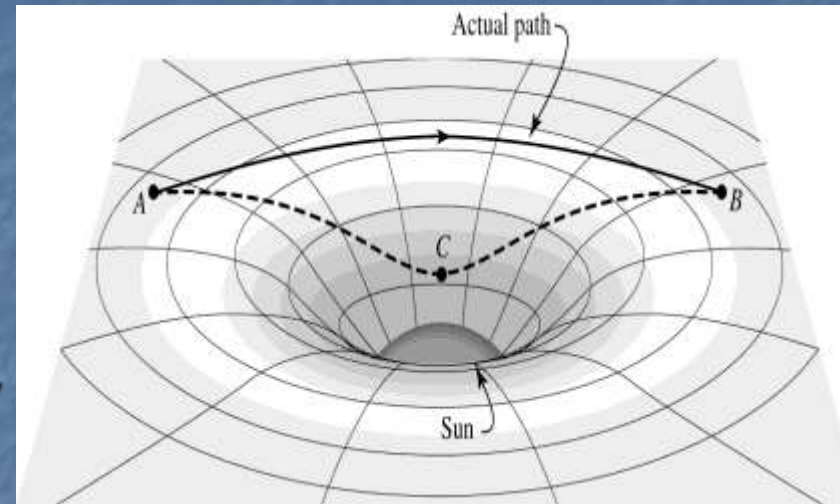
- Hieruit blijkt dat afstand  $ds$  groter is dan afstand  $dr$ : de ruimte is in  $r$ - richting gekromd
- Afstand  $s$  is dus groter dan coördinaatafstand  $r$
- In de andere richtingen ( $q, j$ ) is dat niet het geval
- Ruimtekromming blijkt oorzaak van versnelling te zijn, zonder dat er sprake is van een kracht

## Gravitatieveld



# ART: Ruimtekrumming

- Massa vervormt ruimte  
massa maakt ruimte krom
- Benadering: strak  
gespannen rubberen plaat,  
massa: bijv. zon
- Baan van lichtstraal volgt kortste weg, beweegt  
langs bovenste (kromme) lijn en niet langs  
gestippelde rechte lijn via C, die langer is
- Resultaat: rond grote massa (zwaartekracht) wordt  
licht afgebogen



# ART, Schwarzschild: tijd

- Voor object, op afstand  $r$  en met snelheid  $v$ , in Schwarzschild geometrie, geldt voor tijd:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r} - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Indien  $r \gg R_s$  dan vinden we tijddilatatie zoals gevonden in SRT:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{Lorentzfactor}$$

- Indien snelheid van deeltje  $v = 0$  vinden we invloed van zwaartekracht (massa  $M$ ) op tijd:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}$$

- $\tau$  is eigentijd van object en  $t$  is tijd van waarnemer op grote afstand:  $r \gg R_s$  die bovendien stil staat ( $v = 0$ )





# Afleiding tijd in Schwarzschild

alleen voor liefhebbers

- Begin met de Schwarzschildmetriek:

$$-c^2 dt^2 = -\left(1 - R_s / r\right) c^2 dt^2 + \left(1 - R_s / r\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \vartheta dj^2$$

- Herschrijf als volgt:

$$\left(\frac{dt}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) - \frac{\left[\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \vartheta dj^2\right]}{c^2 dt^2}$$

- De term:  $\left[\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \vartheta dj^2\right] = dl^2$

en  $dl = \text{afgelegde weg}$ , waarmee  $dl / dt = \text{snelheid} = v$

- Daarmee volgt:

$$\frac{dt}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r} - \frac{v^2}{c^2}}}$$



# Experiment Hafele en Keating

- Oktober 1971: Hafele en Keating doen experiment ter verificatie van tijddilatatie volgens ART
- Commercieel vliegtuig maakt twee maal vlucht rond aarde: in westelijke respectievelijk oostelijke richting
- Zowel op aarde als in vliegtuig extreem nauwkeurige cesiumklok, die aan begin experiment exact gelijk lopen
- Tijdverschillen (in ns) ontstaan als gevolg van snelheids- en zwaartekracht invloed (berekend met formule p 32) zijn als volgt:

Voorspelling tijdverschil in ns vliegtuig - aarde	Oostelijke vlucht	Westelijke vlucht
Snelheidsinvloed	$-184 \pm 18$	$96 \pm 10$
Zwaartekracht- invloed	$144 \pm 14$	$179 \pm 18$
Totaal	$-40 \pm 23$	$275 \pm 21$
Waarneming	$-59 \pm 10$	$273 \pm 21$

Tijdverschillen

34

**Conclusie:**  
Relativiteitstheorie  
is behoorlijk goed



# Banen van massa $m$ rond massa $M$

## ■ Klassiek:

- Potentiaal deeltje  $m$  op lineaire baan t.o.v. massa  $M$ :  $V = -\frac{GM}{r}$   
(potentiële energie van  $m$  per massa eenheid)
- Effectieve potentiaal van  $m$  bij beweging in plat vlak:

$$V_{\text{eff}} = -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} \quad (l = \text{impulsmoment per massa eenheid})$$

## ■ ART, Schwarzschild:

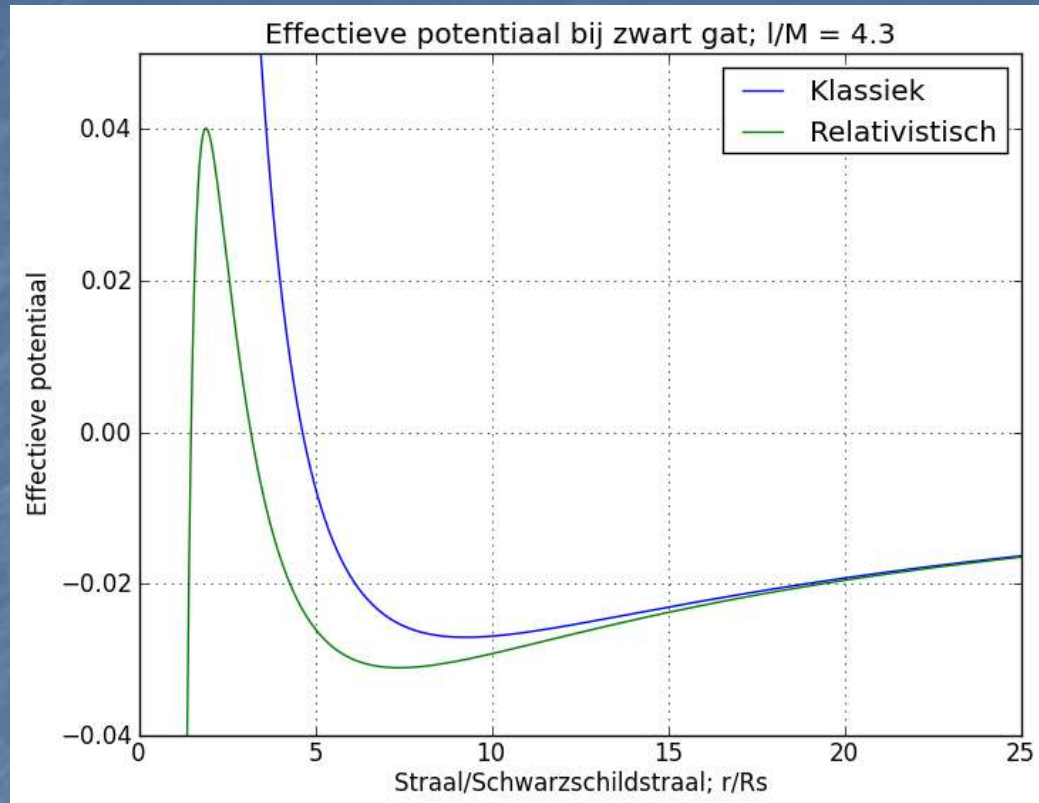
- Effectieve potentiaal heeft derde term in vergelijking met klassiek

$$V_{\text{eff}} = -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{c^2 r^3}$$

- Derde term blijkt bij  $r \gg R_s$  erg klein te worden tov klassieke termen
- Daardoor klassieke oplossing veelal voldoende nauwkeurig, behalve bij banen in omgeving van zwart gat



# Klassiek en ART: Effectieve potentiaal



- Figuur geldt in directe omgeving van zwart gat, met  $I/M = 4,3$
- Klassiek: 1 minimum
- ART: 1 minimum en 1 maximum
- Voor  $r \rightarrow \infty$  gaan beide lijnen naar 0



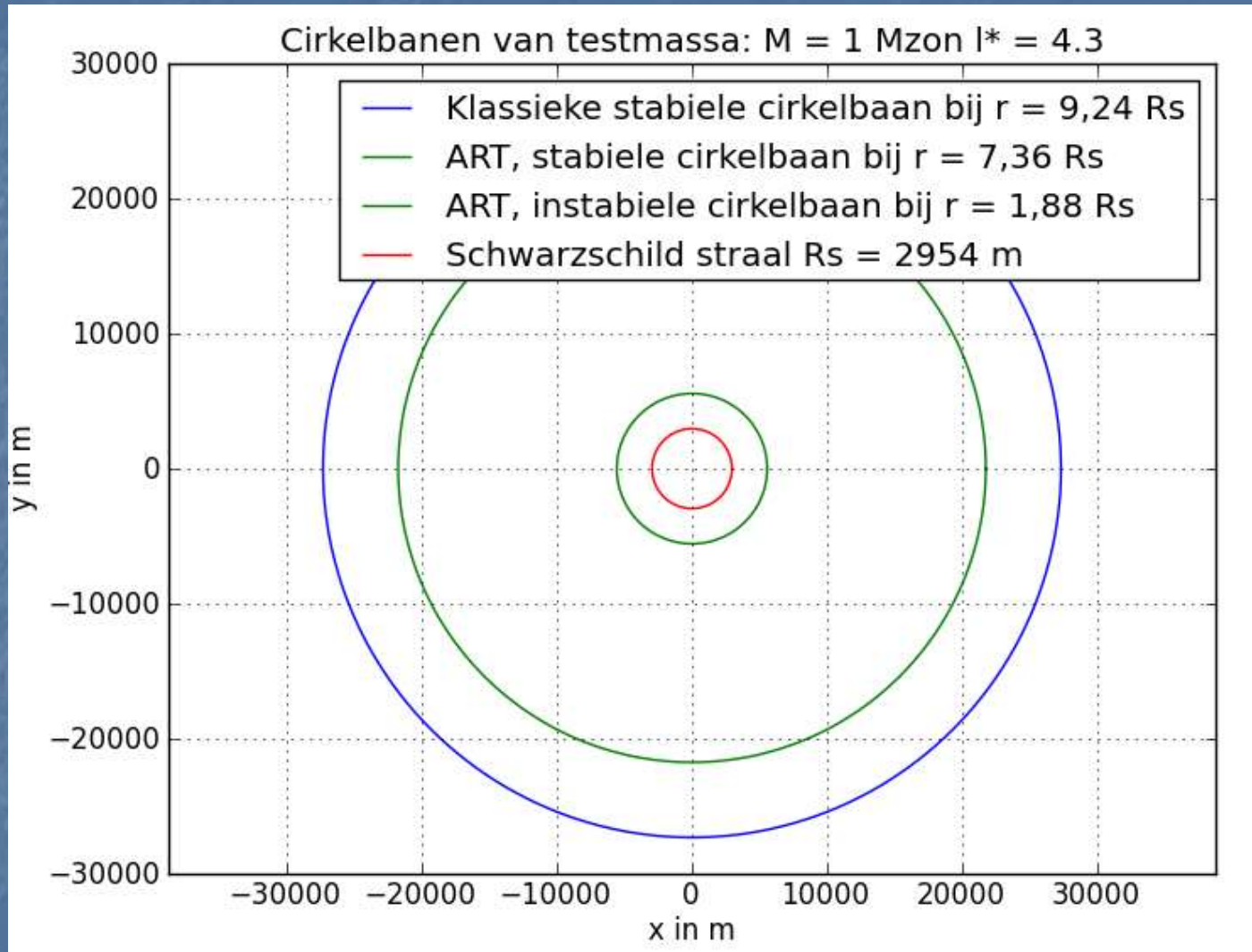
# Banen in omgeving zwart gat

Volgens **klassieke mechanica** geldt (Kepler en Newton) :

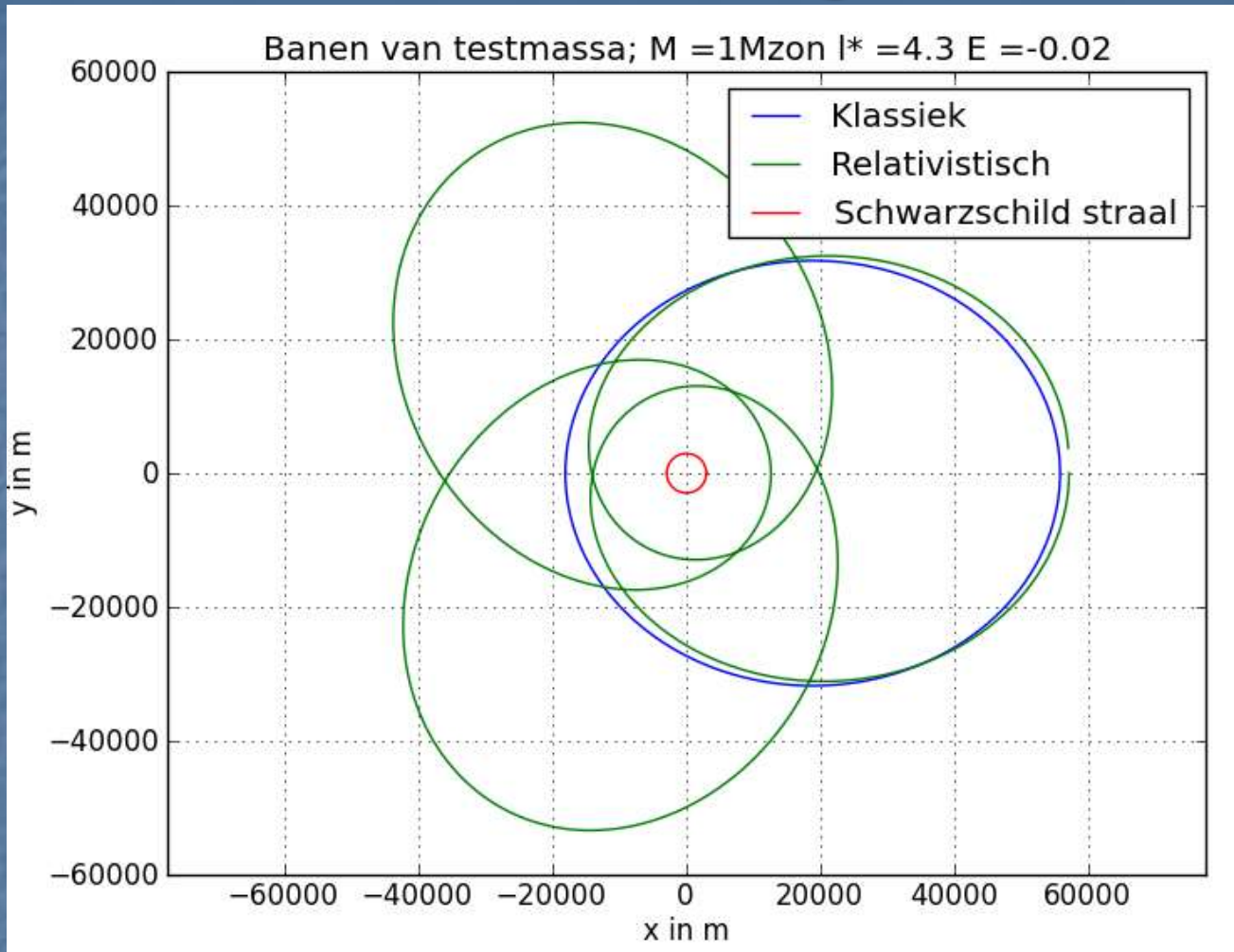
- Indien  $E < 0$  (energie massa  $m$  negatief): **ellips baan**
- Bijzonder geval dat energie  $E$  gelijk is aan minimum potentiaal dan wordt ellips: **stabiele cirkelbaan**
- $E = 0$ : **paraboolbaan** (van oneindig naar oneindig)
- $E > 0$ : **hyperboolbaan** (van oneindig naar oneindig)
- **ART**- banen lijken hierop maar in omgeving van **zwart gat** sterk afwijkend
  - Indien  $E < 0$ : baan lijkt op ellips maar heeft **precessie**
  - Bijzonder I: energie  $E =$  minimum potentiaal: **stabiele cirkelbaan**  
of II: energie  $E =$  maximum potentiaal: **instabiele cirkelbaan**
  - $E = 0$ : **baan** lijkt meestal op parabool, maar in omgeving zwart gat sterk **afwijkend**
  - $Max. potentiaal > E > 0$ : lijkt meestal op hyperbool maar in omgeving zwart gat sterk **afwijkend**
  - $E >$  maximum potentiaal, massa  $m$  verdwijnt in  $M$



# ART: Cirkelbanen rond zwart gat $1 M_{\odot}$



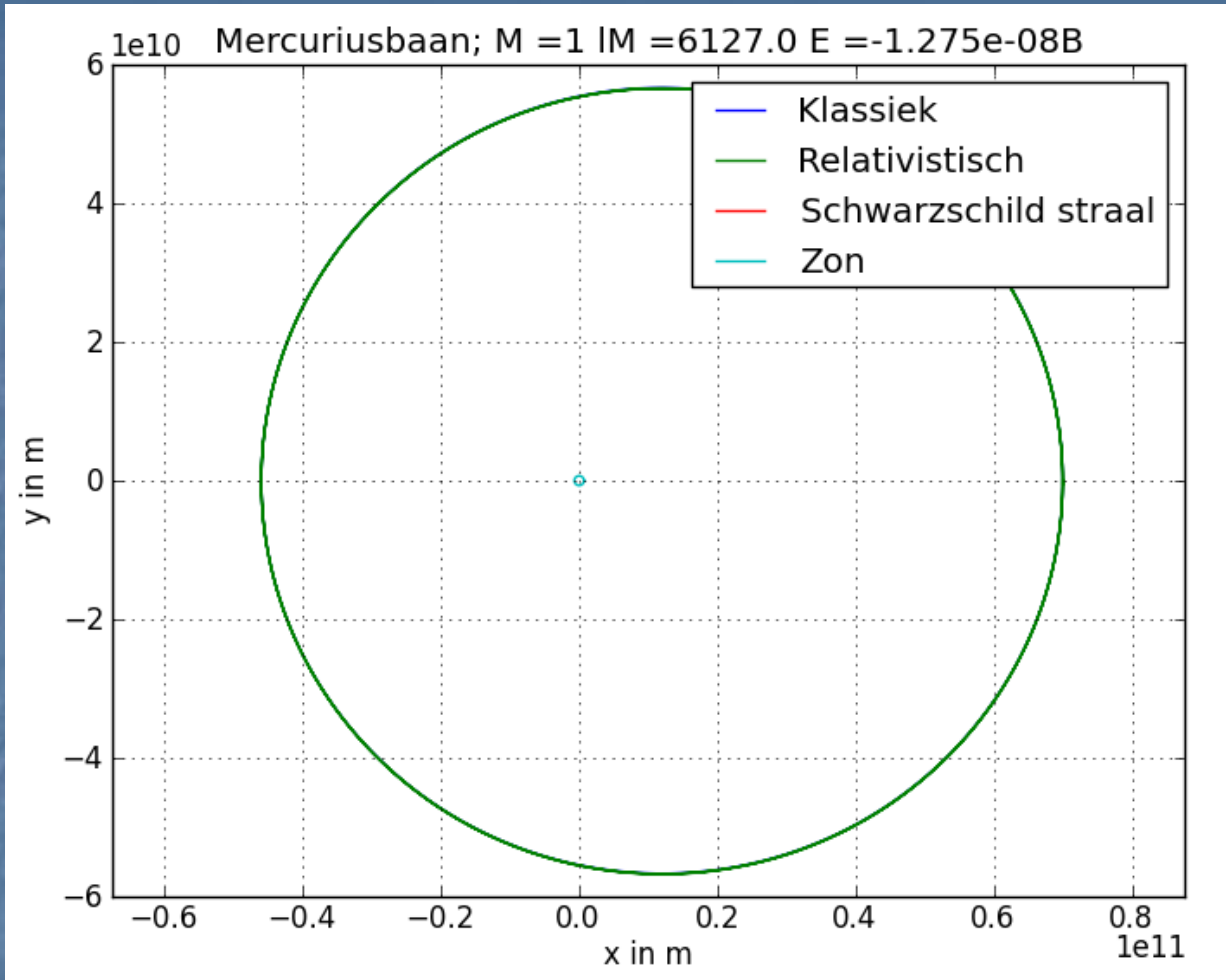
# Banen rond zwart gat, $E < 0$



- Klassieke baan is ellips
- Werkelijke relativistische baan heeft hoge precessie



# Mercuriusbaan rond Zon

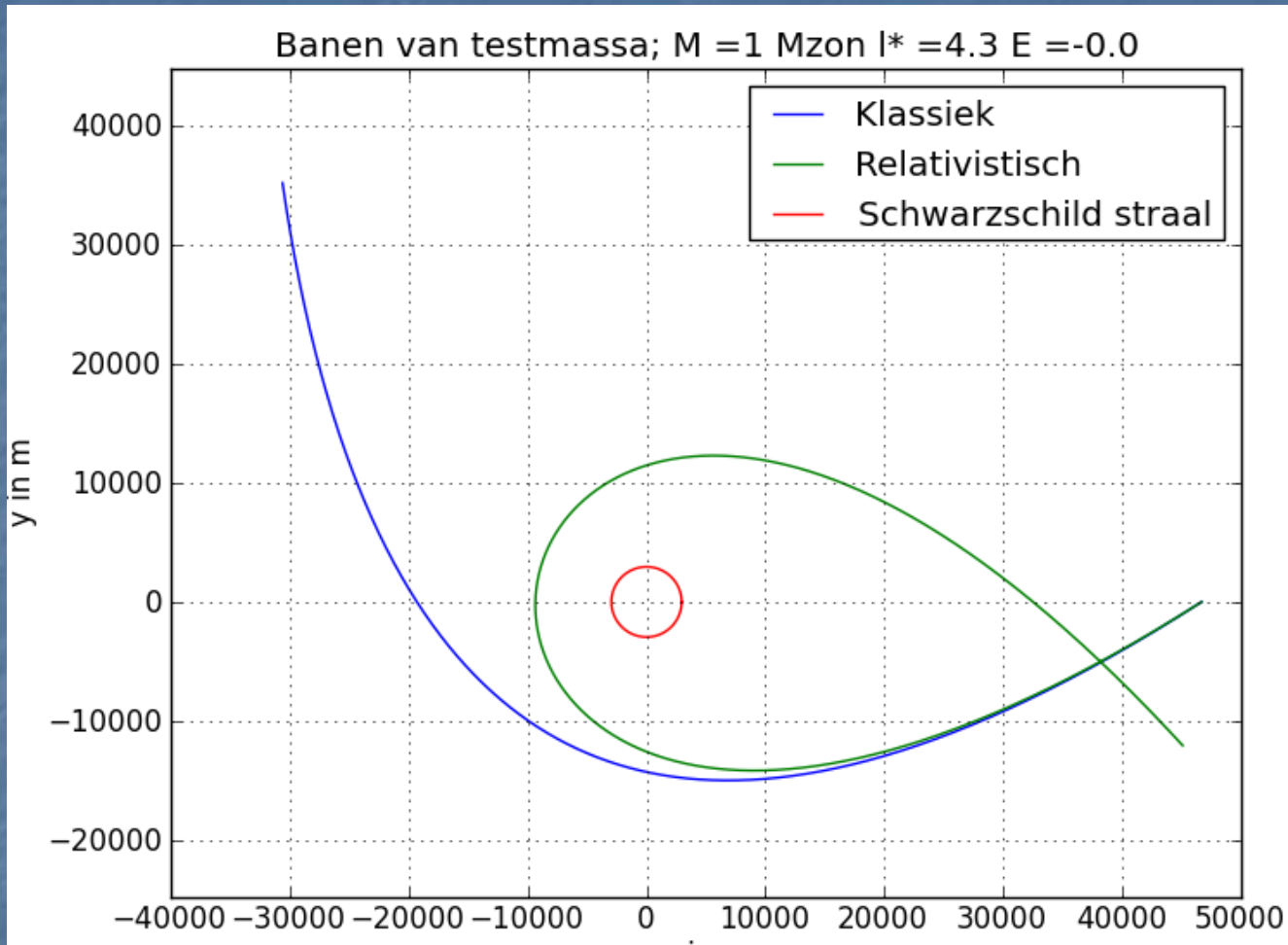


- Klassieke baan is ellips
- Werkelijke relativistische baan heeft precessie, maar op deze schaal niet zichtbaar





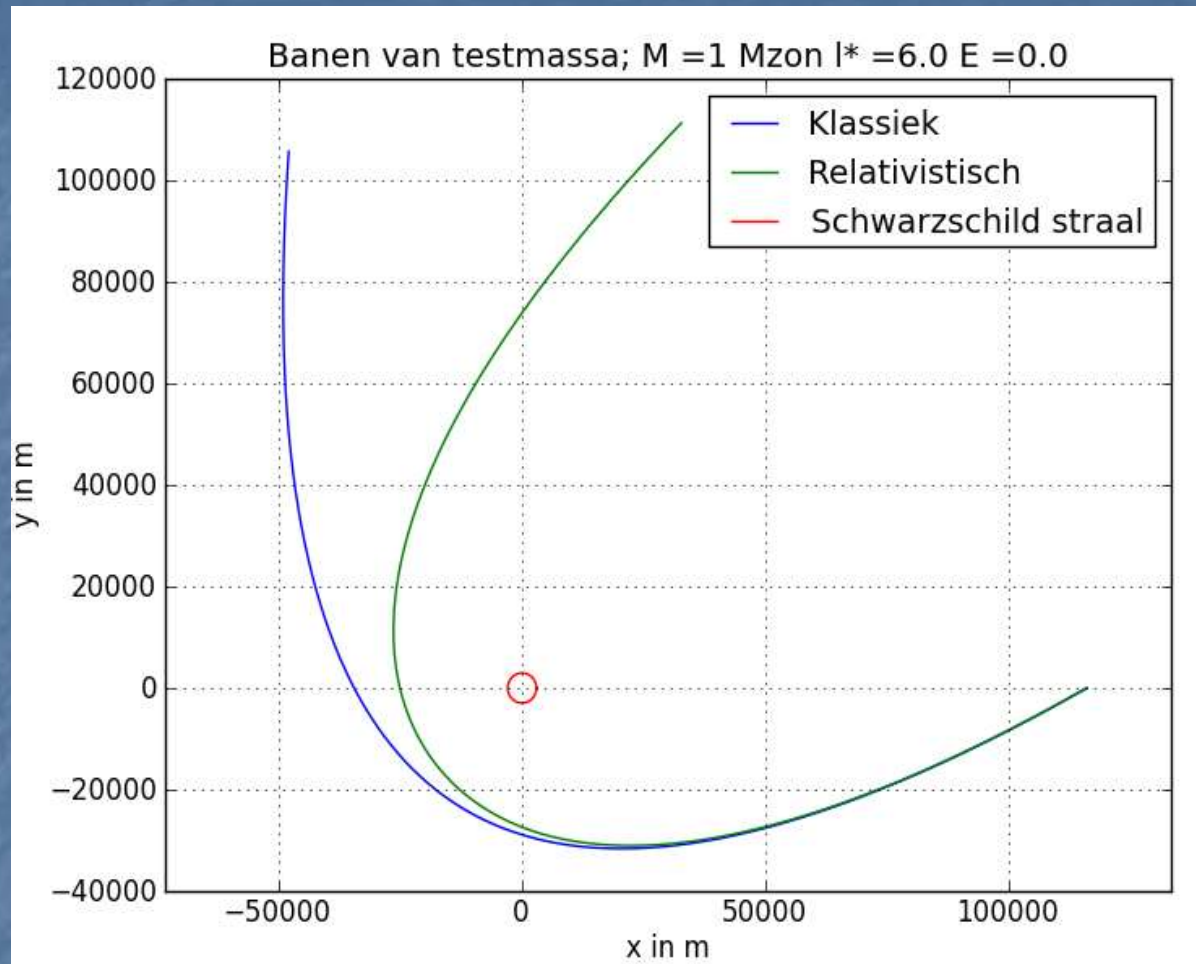
# Banen rond zwart gat, $E = 0$



- Klassieke baan is parabool
- Werkelijke relativistische baan lijkt daar niet op



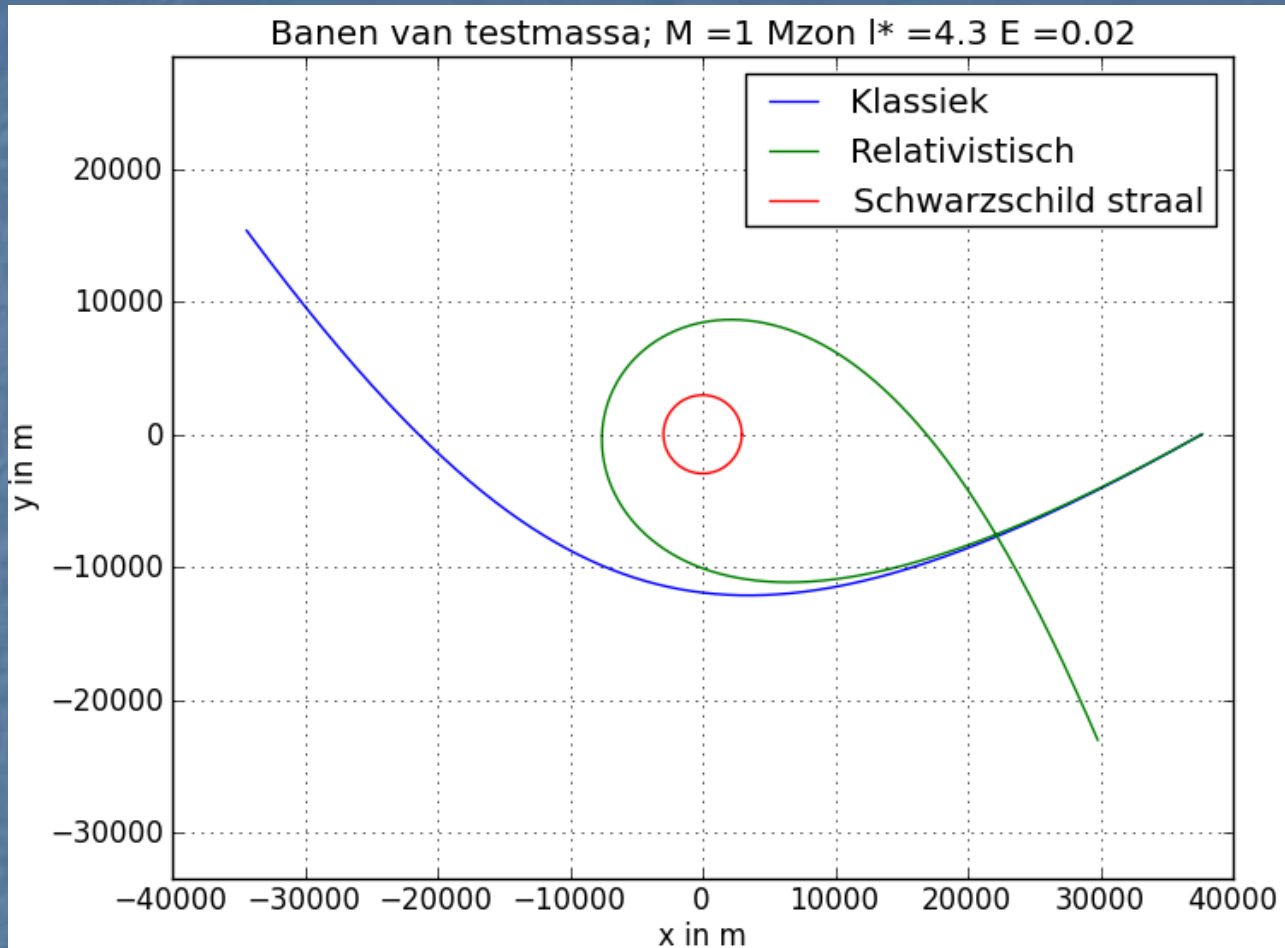
# Banen iets verder van zwart gat, $E = 0$



- Klassieke baan is parabool maar verder verwijderd van zwart gat
- Werkelijke relativistische baan begint er al beetje op te lijken



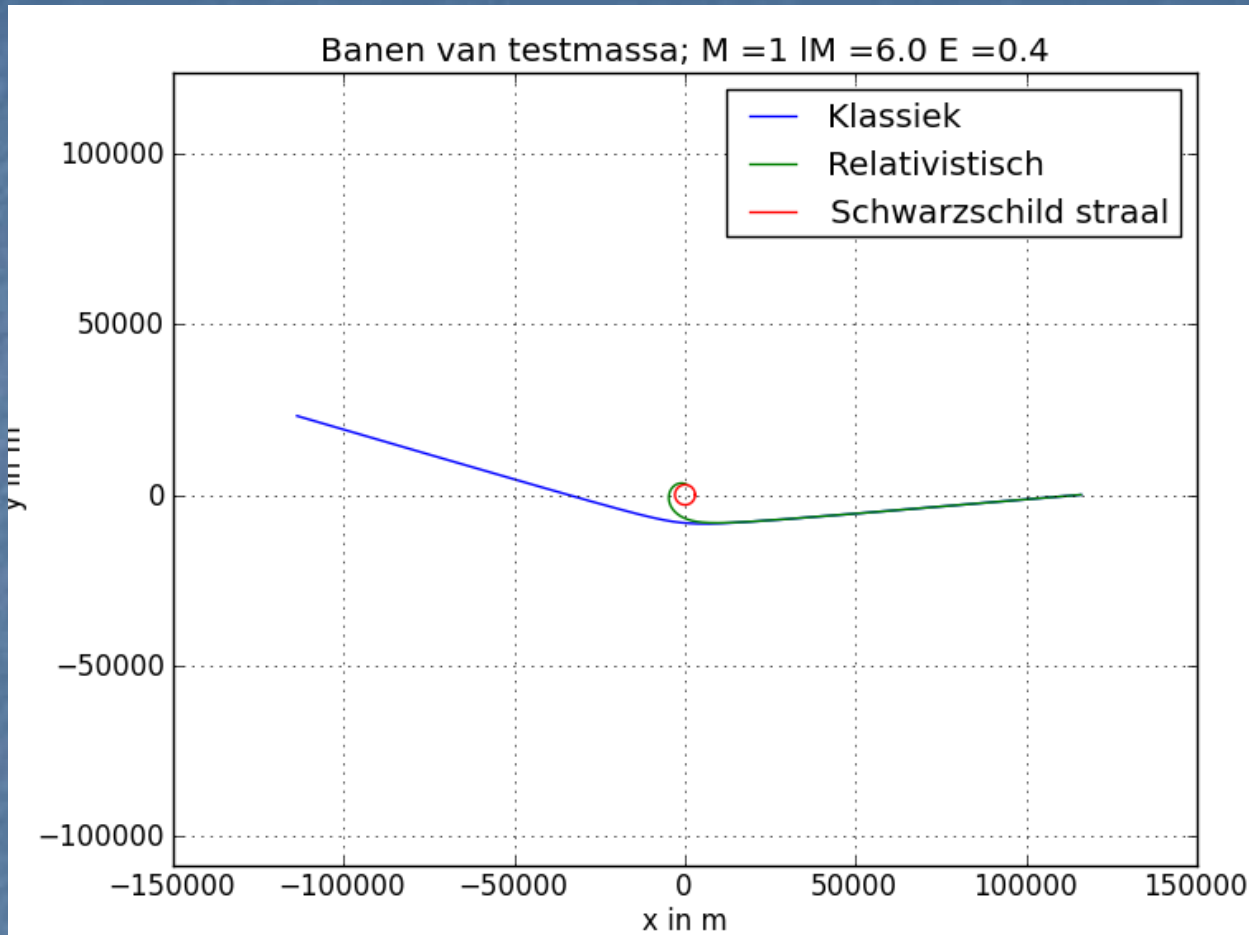
# Banen rond zwart gat, $\max. pot. > E > 0$



- Klassieke baan is hyperbool
- Werkelijke relativistische baan werkt daar sterk van af



# Banen rond zwart gat $E > \text{max. pot.}$

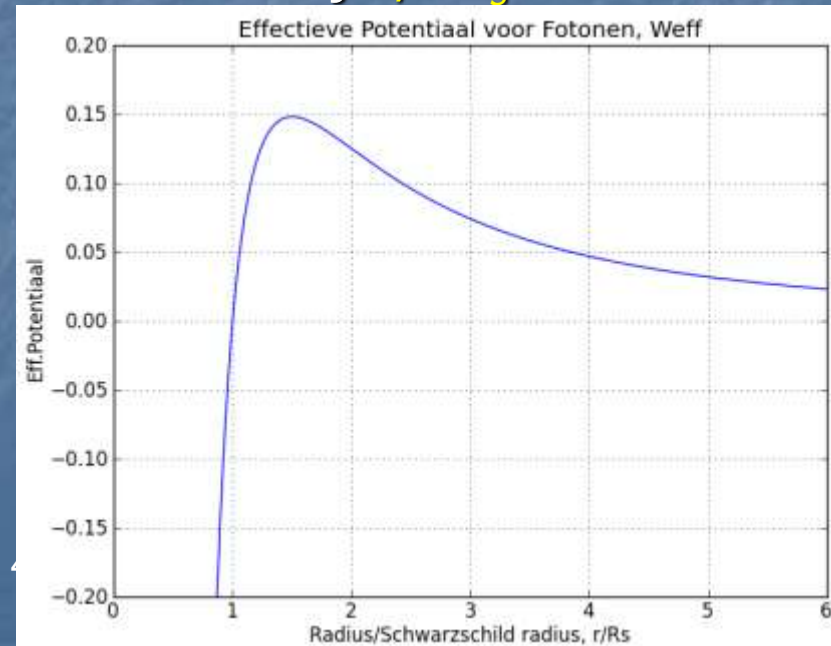


- Klassieke baan is hyperbool
- Werkelijke relativistische baan eindigt op  $r = 0$ , massa  $m$  verdwijnt dus in zwart gat



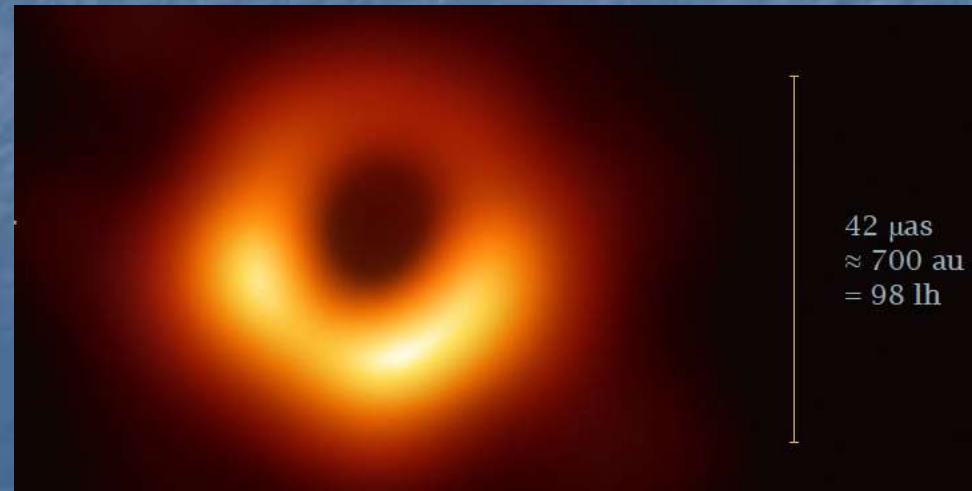
# Fotonbanen

- Klassiek:
  - Licht volgt rechte lijn, er is geen ruimtekromming
  - Dus cirkelbanen e.d. zijn niet mogelijk
- ART, Schwarzschild
  - Potentiaal voor fotonen zie figuur
  - Licht wordt aangetrokken door massa
  - Verschillende soorten banen mogelijk
  - Potentiaalfunctie voor licht heeft 1 maximum bij  $1,5 R_s$
  - Geeft instabiele cirkelbaan, bij  $1,5 R_s$  "photon sphere"
  - Licht vanuit oneindig met loodrechte afstand van  $1,5\sqrt{3} R_s$  komt in cirkelbaan op "photon sphere"



# Foto Zwart gat, met Event Horizon Telescoop

- Eerste foto (2017, prof Heino Falcke) superzware zwarte gat (6,5 miljard  $M_{\odot}$ ) in M87, met Schwarzschildstraal op  $R_s = 8$  microboogseconde
- Rond zwart gat: schijf van roterend gas met hoge temperatuur, zendt licht in alle richtingen
- Licht wordt afgebogen, roteert aantal maal of geheel of gedeeltelijk rond "photon sphere" met  $D = 3R_s$ , gedeelte verdwijnt in zwart gat en rest ontsnapt
- Ontsnapte licht (oranje ring) komt gedeeltelijk in onze richting en is afkomstig van zowel voorzijde als achterzijde
- Gemiddelde diameter oranje ring, fotonring:  $3\sqrt{3}R_s = 5,2R_s \approx 42$  micro boogseconde
- In centrum: Zwart Gat
- Roodverschuiving  $\approx 0,2$



# Foto Sagitarius A\*

## Astrophysics with the SgrA\* Black Hole

we know quite precisely it is at a distance of 26 thousand lightyear...

last stable orbit  
of gas in orbit around  
Black Hole

Event Horizon,  
radius of the Black Hole,  
no return from here

Photon Ring,  
where we see the  
photons that have gone  
round the Black Hole  
once or multiple times



resolution of the EHT, we cannot  
resolve smaller details

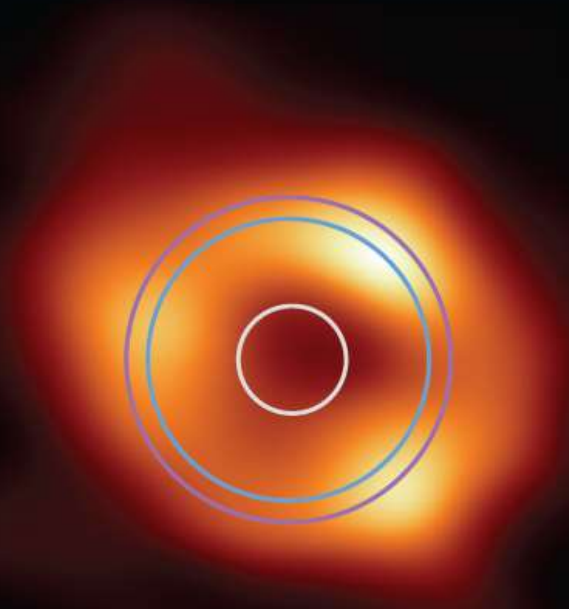


image follows circle,  
as predicted by General  
Relativity

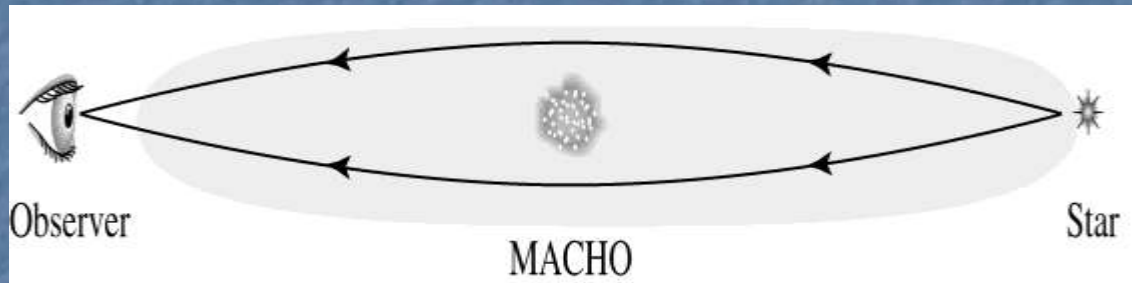
diameter equals  $51 \mu\text{as}$ ,  
because we know the  
mass and distance, this  
is precisely correct!

Source is variable,  
azimuthal structure  
uncertain;  
almost face on?



# Gravitatielenzen

- Een gravitatielens ontstaat doordat een grote massa (de lens, bijv. een sterrenstelsel) licht afbuigt, waardoor een niet-zichtbaar object (de bron), toch waargenomen kan worden



- Volgens ART is lichtbuiging te berekenen met:

$$D_j = \frac{4GM}{c^2 b} = \frac{2R_s}{b} \quad b = \text{impact parameter tov lens}$$

- Gravitatielenzen werken met alle soorten straling (licht, radiogolven etc.) en ook voor gravitatiegolven

MACHO: "Massive Astrophysical Compact Halo Object"



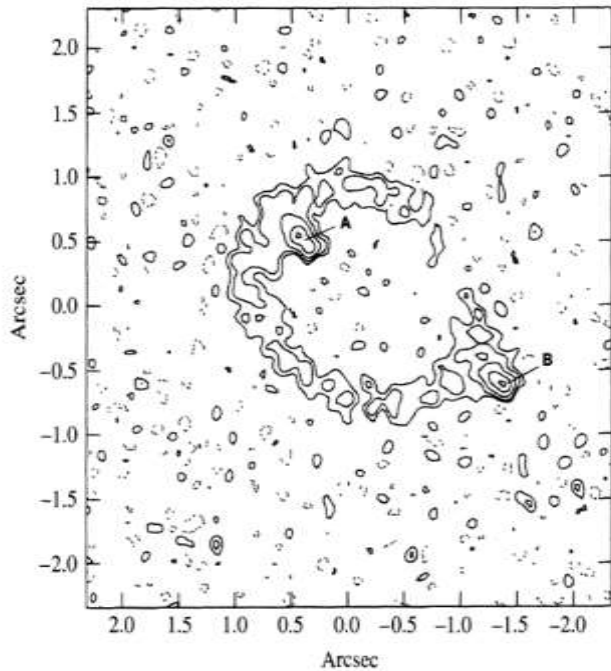


# Gravitatielens

- Gravitatielens is een grote massa waarachter een lichtbron verscholen ligt; indien dan ...  
bron, lens en waarnemer ongeveer op één lijn liggen dan wordt bron zichtbaar ondanks de lichtblokkade door de voorliggende massa
- Afhankelijk van onderlinge posities kan achterliggende object zichtbaar worden als Einsteinkruis of meerdere afbeeldingen
- Gravitatielens kan intensiteit van licht enorm doen toenemen
- Door gravitatielens wordt anders onzichtbaar object zichtbaar
- Door analyse van het licht van waargenomen object kan zowel veel informatie bepaald worden over bron als lens
- **Gravitatielensen tegenwoordig succesvolle onderzoektak**



# Einsteinring en kruis

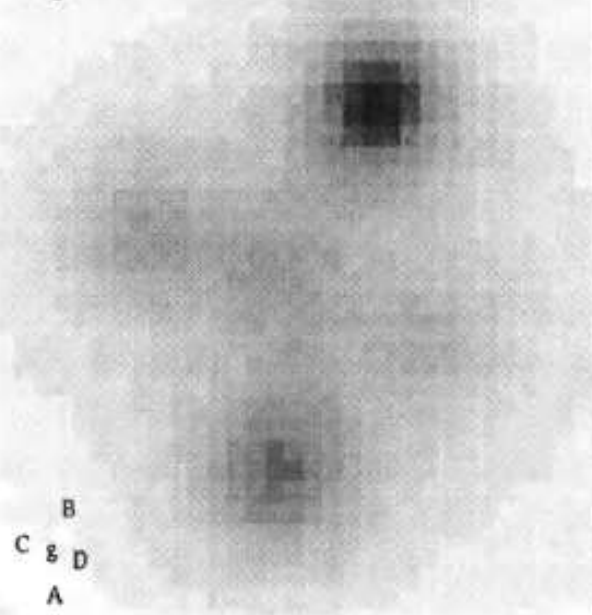


Einsteinring:  
radiobeeld van een  
sterrenstelsel via een  
zwaartekracht lens

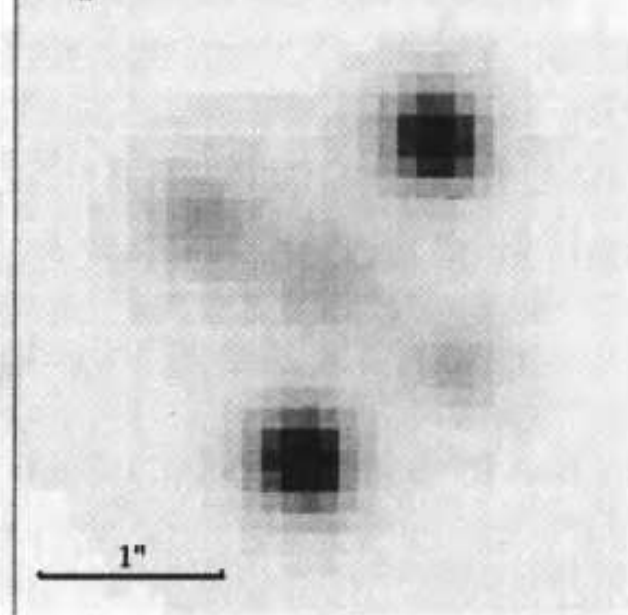
Relativiteit en Sterrenk

Einsteinkruis: vier beelden van  
quasar Q2237+031

Aug 1991



Aug 1994



# Einsteinringen



ALMA opname

Vroeg sterrenstelsel SDP81

Stof in stelsel zichtbaar  
gemaakt

Geen zichtbare lens

Relativiteit en Sterrenkunde

Hubble opname

Verst verwijderde gravitatielens

Vier afbeeldingen + ring van sterren-  
stelsel met stervorming in zeer  
vroeg heelal

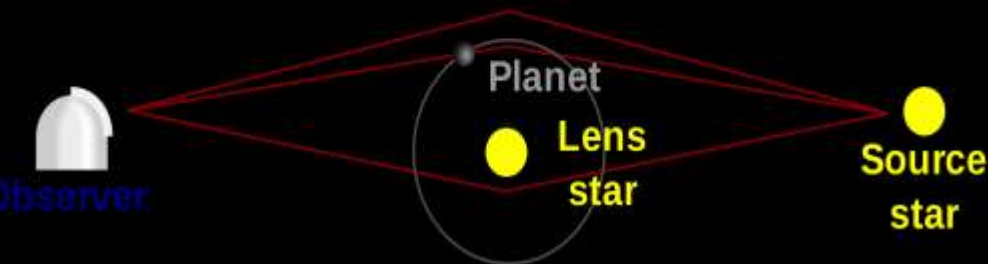
Centraal: elliptisch stelsel als lens



# Microlensing

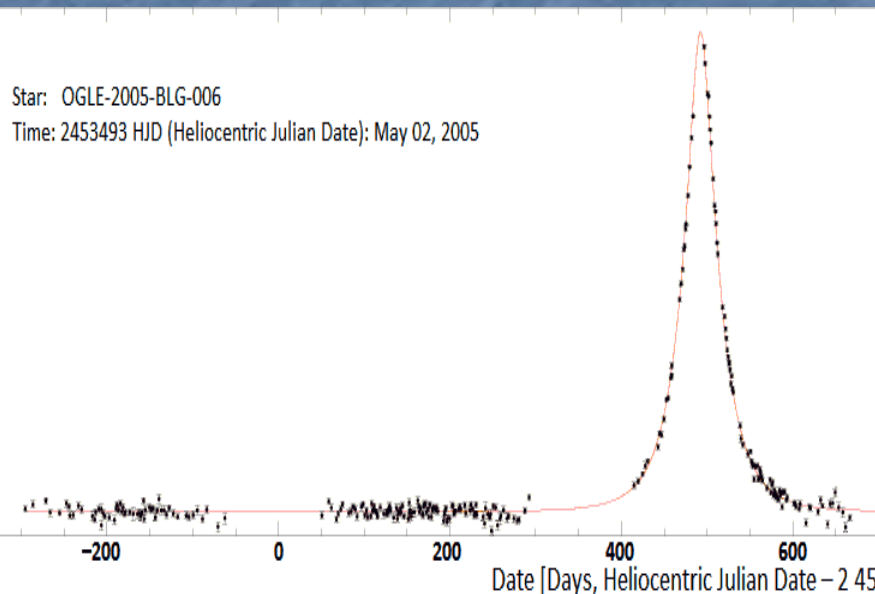
- Er is sprake van een microlens indien we te maken hebben met kleine massa's van zowel bron (ster) als lens (ster)
- Bij zoektocht naar exoplaneten wordt o.a. gebruik gemaakt van microlens systemen
- Tijdens baan exoplaneet rond lensster zal bronster tijdelijk helderder worden; dat is reden om exoplaneet bij betr. ster te veronderstellen
- Werkt goed voor exoplaneten met afstanden tot 10 AE tov hun ster

## Gravitation microlensing



Star: OGLE-2005-BLG-006

Time: 2453493 HJD (Heliocentric Julian Date): May 02, 2005

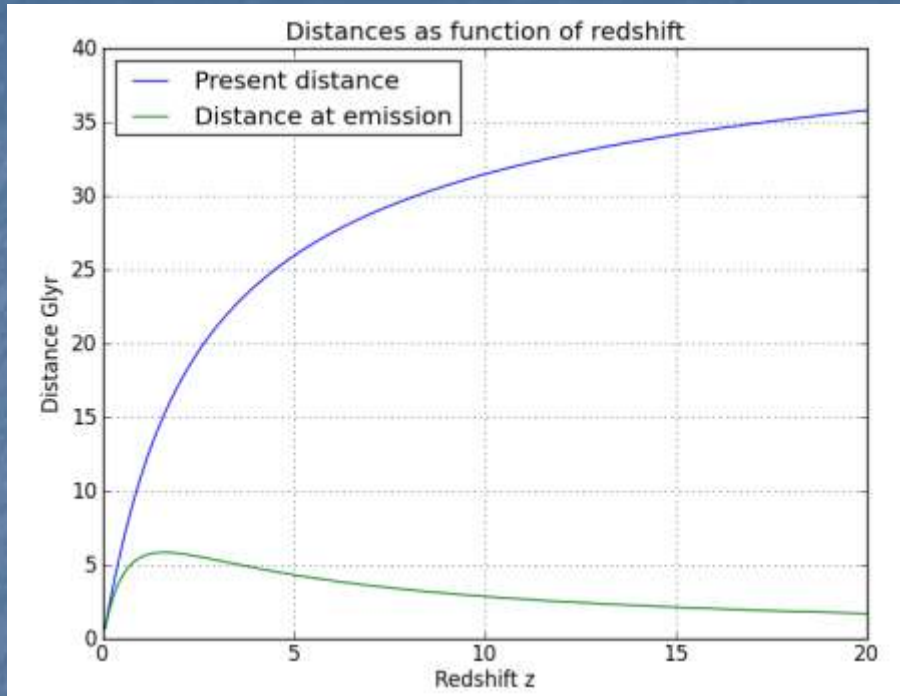


# Licht van grote afstanden

- Licht heeft eindige snelheid:  $\approx 300.000$  km/s
- Waarnemen van sterrenstelsels op grote afstand: **kijken in verleden**
- Oerknaltheorie: heelal wordt steeds groter
- Voor 1995 dacht men: expansiesnelheid neemt a.g.v. zwaartekracht steeds verder af
- Echter sinds 1995: Er bestaat **donkere energie** en daardoor vertraagt heelalexpansie niet meer, maar **versnelt** (Nobelprijs 2010 voor Perlmutter, Riess en Schmidt)
- Heelalleeftijd is ca **13,8 miljard jaar**; heelal is versnellend sinds heelalleeftijd van **7,6 miljard jaar**; dus met terugkijktijd 6,2 miljard jaar
- Heelalexpansie: lichtgolven onderweg naar ons toe worden uitgerekt: **kosmologische roodverschuiving**
- Kosmologen spreken altijd over roodverschuiving  $z$  en geven vrijwel nooit afstanden of lichtreistijden van veraf gelegen sterrenstelsels
- Verste gevonden sterrenstelsel met James Webb telescoop heeft roodverschuiving  $z = 13,3$ ; ontvangen licht heeft dan  $14,3 \times$  golflengte van het licht dat uitgezonden werd

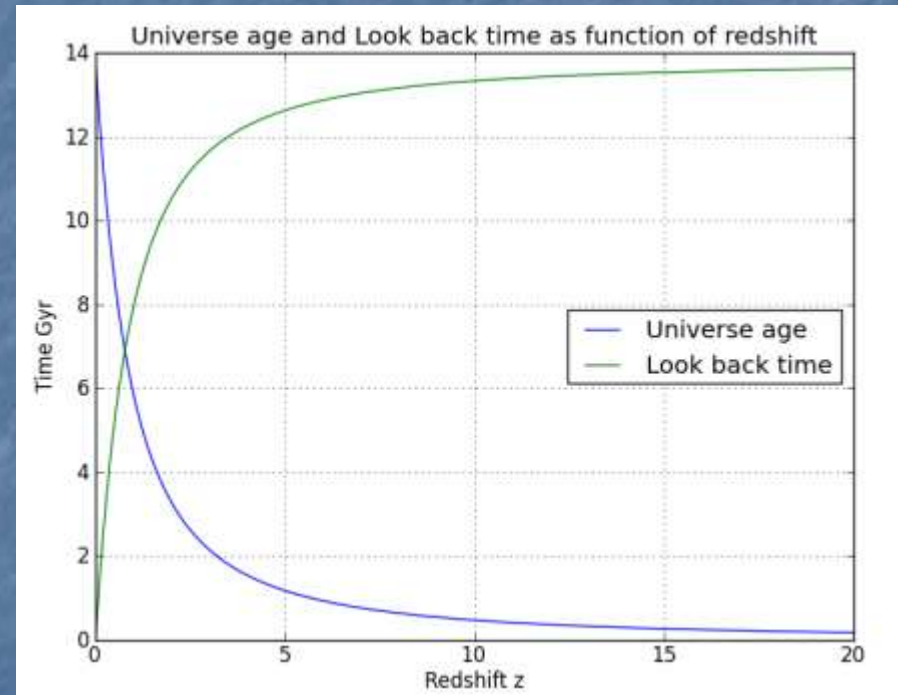


# Afstand en tijd als functie van roodverschuiving

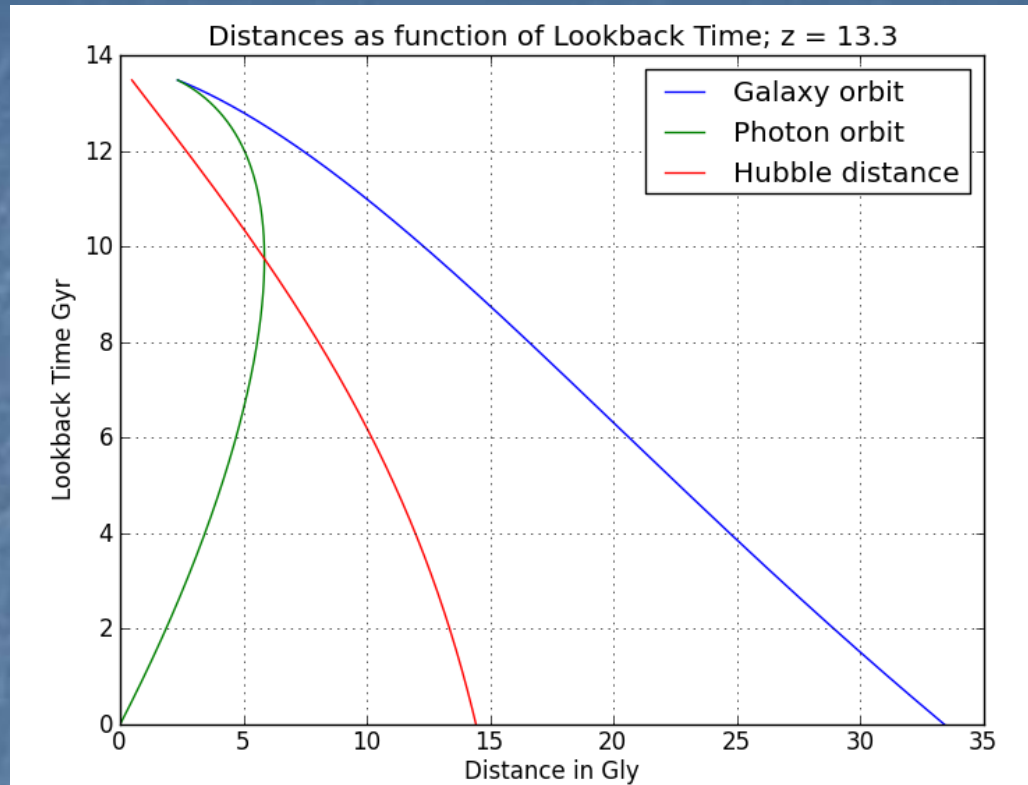


De terugkijktijd is dan 13,5 miljard jaar en bijbehorende heelal leeftijd is 320 miljoen jaar

Sterrenstelsel op roodverschuiving  $z = 13,3$  heeft huidige afstand van 33,4 miljard lichtjaar. Bij emissie was de afstand 2,3 miljard lichtjaar



# Licht van sterrenstelsel op $z = 13,3$



- Rood betreft Hubble-afstand: op die afstand is expansiesnelheid van heelal gelijk aan lichtsnelheid
- Groen is lichtbaan: licht beweegt zich eerst verder van ons af, voordat het naar ons toe beweegt
- Blauw: Afstand tot sterrenstelsel neemt continu toe



# Klassiek: Newton's bewegings- en gravitatie wetten

- In 1686 publiceerde Newton: "Principia Mathematica Philosophiae Naturalis"
- Hierin beschreef hij drie bewegingswetten:
  - Een object in rust blijft in rust en een object met constante snelheid behoudt die snelheid, tenzij een kracht op het object werkt
  - De versnelling van een object is afhankelijk van de massa  $m$  en de er op uitgeoefende kracht  $F$ :  $a_N = F / m$
  - Wanneer een object een kracht uitoefent op ander object, dan oefent dat andere object een gelijke maar tegengestelde kracht uit op het eerste object: *Actie = - Reactie*
- Daarnaast kwam hij tot de gravitatie wet:
  - Twee massa's  $M$  en  $m$  trekken elkaar aan met kracht evenredig met die massa's en omgekeerd evenredig met de afstand  $r$  in kwadraat:

$$F_N = -G \frac{Mm}{r^2}$$

Hieruit volgt gravitatie-  
versnelling door  $M$ :

$$a_N = -G \frac{M}{r^2}$$





# Gravitatie

- Newton toonde aan: cirkelbanen zijn mogelijk volgens de gravitatiewet; daarmee werden Kepler wetten geloofwaardig, maar .....
- Hij geloofde niet dat zwaartekracht tussen twee lichamen, die geen contact met elkaar hebben, door vacuüm overgebracht kan worden: hij noemde dat **absurd**
- Het was Einstein, met de publicatie van de Algemene Relativiteitstheorie (ART) in 1915, die Newton's mening min of meer bevestigde, maar .....
- Volgens ART is gravitatie het gevolg van ruimtekromming en dat is (nog) niet begrepen
- Moderne natuurkunde gaat uit van velden, die ontstaan door deeltjes, maar .....
- Gravitonen, die volgens meeste natuurkundigen moeten bestaan, en verantwoordelijk zijn voor zwaartekrachtveld / ruimtekromming, zijn nog nooit aangetoond



# Gravitatie volgens ART

- Einstein's ART: **er bestaat geen zwaartekracht**, maar .....
- Versnellingen ontstaan door ruimtekromming
- Ruimte wordt vervormd door aanwezige energie (massa en straling) in de ruimte
- Dus nogal complex:
  - Massa en straling vervormen ruimte
  - Ruimtekromming veroorzaakt versnelling van massa's en straling
- Karl Schwarzschild (1873-1916) was de eerste die al in 1915 een oplossing vond voor Einstein's veldvergelijkingen:

## Schwarzschild geometrie

- Eén van de eenvoudigste vormen van ruimtekromming
- Vrijwel alle verschijnselen in deze presentatie zijn gebaseerd op Schwarzschild



# Hoe goed is Klassieke Zwaartekracht versus ART gravitatie?

- Klassiek zwaartekrachtveld rond massa  $M$ :  $a_N = \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{M}{r^2}$   
Tijd  $t$  is voor iedereen dezelfde
- Hoe goed is klassieke benadering in vergelijking met ART, Schwarzschild geometrie?
  - ART geeft, naar ons huidige inzicht, beste bepaling van "zwaartekracht"
  - Al eerder gezien: Schwarzschild geometrie houdt in dat er ruimtekromming is
- SRT gaat uit van inertiaal systemen: eenparige snelheid en geen zwaartekracht, dat betekent:
  - Ruimte is vlak; geen ruimtekromming en dus
  - Geen zwaartekracht



# Berekening volgens ART

- Volgens ART zijn versnellingen te berekenen met de zogenaamde geodetische vergelijking:

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} = -G_{bg}^a \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^g}{dt} \rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = -G_{bg}^r \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^g}{dt}$$

- Hiermee vinden we de versnelling van  $r$ -coördinaat als functie van eigentijd  $\tau$
- Flinke rekenpartij, met als resultaat:
  - versnelling in coördinaat- $r$ -richting, als functie van de eigentijd  $t$  als gevolg van ruimtekromming
  - om versnelling deeltje  $m$  te krijgen moet coördinaat-afstand  $r$  omgewerkt worden naar werkelijke afstand  $s$ , dus ruimtekromming in rekening te brengen en .....
  - om versnelling als functie tijd  $t$  van waarnemer te krijgen tijdrelatie in rekening te brengen



# Statische massa: vergelijking ART- klassiek

- Massa  $m$  bevindt zich op vaste coördinaatafstand  $r$  van Schwarzschild centrum
- Relativistische versnelling in eigentijd  $t$  van massadeeltje en in tijd  $t$  van waarnemer op grote afstand:

$$a_{d,t} = -\frac{GM}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - R_s / r}} \quad (1)$$

$$a_{d,t} = -\frac{GM}{r^2} \sqrt{1 - R_s / r} \quad (2)$$

- Klassiek (uitgedrukt in invariante tijd  $t$ ):  $a_N = -\frac{GM}{r^2}$
- ART correctie dus heel klein voor:  $r \gg R_s$  Benadering van Newton is dus behoorlijk goed
- Vergelijking (1) is verreweg het belangrijkste. Dat is de versnelling die deeltje  $m$  ondervindt en welke kracht (groter dan klassiek) nodig is om statisch te blijven:  $F_{d,t} = -ma_{d,t}$
- Vergelijking (2) geeft aan wat een verre waarnemer "ziet"



# Numerieke voorbeelden; statische massa

- Als centrale massa:  $M_{\square} \gg 2 \cdot 10^{30}$  kg;  $R_s = 2954$  m

Afstand	$a_{d,t}$ m/s <sup>2</sup>	$a_{d,t}$ m/s <sup>2</sup>	$a_N$ m/s <sup>2</sup>
1 AE	$-5,93 \cdot 10^{-3} \cdot (1 + 9,87 \cdot 10^{-9})$	$-5,93 \cdot 10^{-3} \cdot (1 - 9,87 \cdot 10^{-9})$	$-5,93 \cdot 10^{-3}$
$10R_s$	$-1,603 \cdot 10^{11}$	$-1,443 \cdot 10^{11}$	$-1,521 \cdot 10^{11}$
$3R_s$	$-2,070 \cdot 10^{12}$	$-1,380 \cdot 10^{12}$	$-1,690 \cdot 10^{12}$



# Massa $m$ op vrije radiale baan

- Massa  $m$  is vrij vallend op radiale baan richting Schwarzschild zwart gat
- Relativistische versnelling in eigentijd  $t$  van deeltje en in tijd  $t$  van waarnemer op grote afstand:

$$a_{d,t} = - \frac{GM}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}}$$

Zelfde resultaat als bij vaste massa

$$a_{d,t} = - \frac{GM}{r^2} \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} \left\{ \frac{1}{e^2} \left( 3 - \frac{3R_s}{r} - 2e^2 \right) \right\}$$

- Klassiek:

$$a_N = - \frac{GM}{r^2}$$

$e$  is dimensieloze energie van deeltje



# Numerieke voorbeelden; radiale baan

- Als centrale massa:  $M_{\square} \gg 2 \cdot 10^{30}$  kg;  $R_s = 2954$  m

Afstand	$a_{d,t}$ m/s <sup>2</sup>	$a_{d,t}$ m/s <sup>2</sup>	$a_N$ m/s <sup>2</sup>
1 AE	$-5,93 \cdot 10^{-3} \cdot (1 + 9,87 \cdot 10^{-9})$	$-5,93 \cdot 10^{-3} \cdot (1 - 6,91 \cdot 10^{-9})$	$-5,93 \cdot 10^{-3}$
$10R_s$	$-1,603 \cdot 10^{11}$	$-1,010 \cdot 10^{11}$	$-1,521 \cdot 10^{11}$
$3R_s$	$-2,070 \cdot 10^{12}$	0	$-1,690 \cdot 10^{12}$





# Zwaartekrachtgolven

- Eerder gezien: massa's vervormen de ruimtetijd
- Bewegende massa zal ruimtetijd in omgeving van die massa periodiek vervormen
- Twee rond elkaar draaiende massa's zijn een voorbeeld van het ontstaan van periodieke vervormingen van de ruimtetijd:

## zwaartekrachtgolf

- Zwaartekrachtgolven bewegen met lichtsnelheid door heelal
- Vervorming is ontzettend klein, Einstein verwachtte dat dit nooit te meten zou zijn, maar sinds 2015 kunnen we het wel

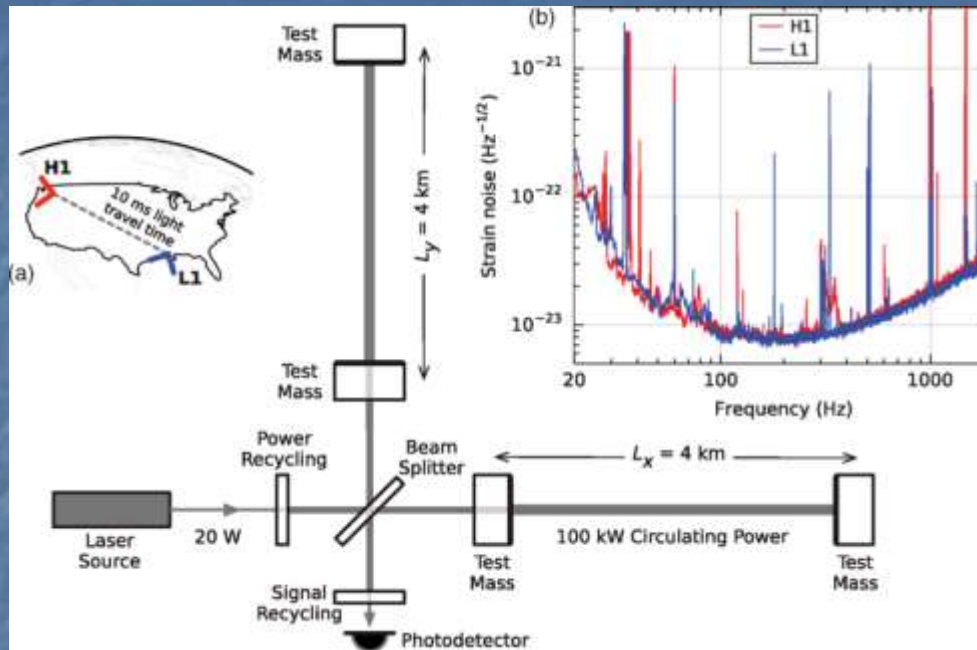


# Voorspelling van Zwaartekrachtgolven

- Volgens klassieke natuurkunde zijn zwaartekrachtgolven niet mogelijk en .....
- verandering aan de massa zou direct, zonder tijdvertraging overal in heelal waargenomen kunnen worden
- Al in 1893 heeft Olivier Heaviside gesproken over gravitatiegolven in vergelijking met elektromagnetische golven
- In 1905 beschreef ook Poincaré gravitatiegolven
- Volgens Einstein waren gravitatiegolven met ART verklaarbaar in 1916
- In 1974 eerste bewijs voor bestaan van gravitatiegolven door Hulse en Taylor: "binary pulsar" rotatieperiode neemt af, volgens ART alleen mogelijk door energieverlies agv gravitatiegolven (Nobelprijs in 1993)



# Waarnemen van gravitatiegolven

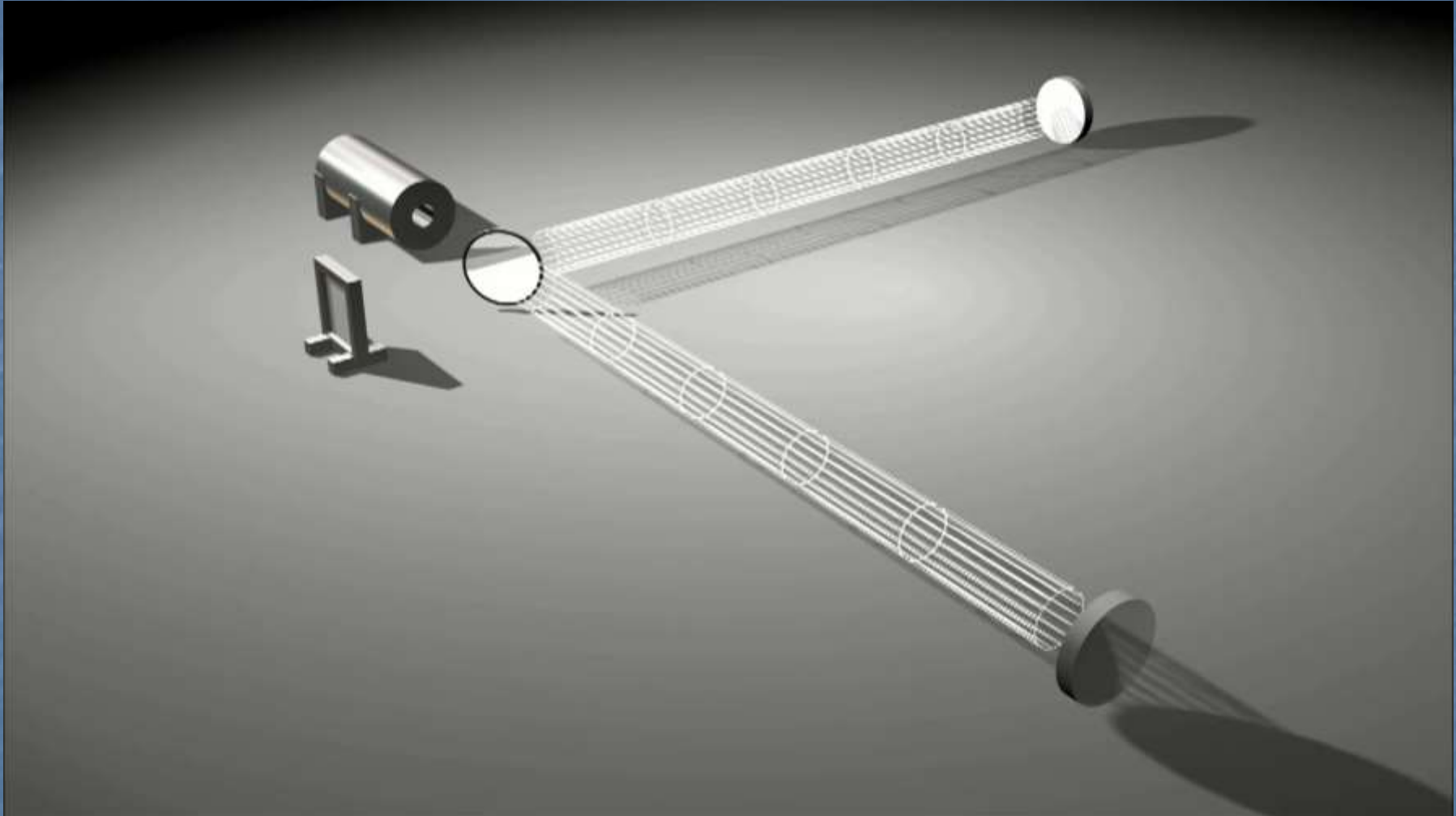


Laser Interferometer, bestaande uit:

- Laserbron
- Beam splitter
- Twee onderling loodrechte armen, voorzien van spiegels
- Armen zijn aantal km lang en licht wordt vele malen weerkaatst
- Detector die faseverschuiving tussen geretourneerde licht uit armen vaststelt



# Gravitatiegolfdetector



# (2 identieke) LIGO detectoren – VS

- Formeel in bedrijf: 18 september 2015; Eerste waarneming 14 sept.
- LIGO (Laser Interferometer Gravitational wave Observatory) Livingston – Louisiana
- Twee armen van 4 km

Eén detector is onvoldoende om waarnemingen te doen. Met één detector is het niet mogelijk plaatselijke trillingen te onderscheiden van zwaartekrachtgolven



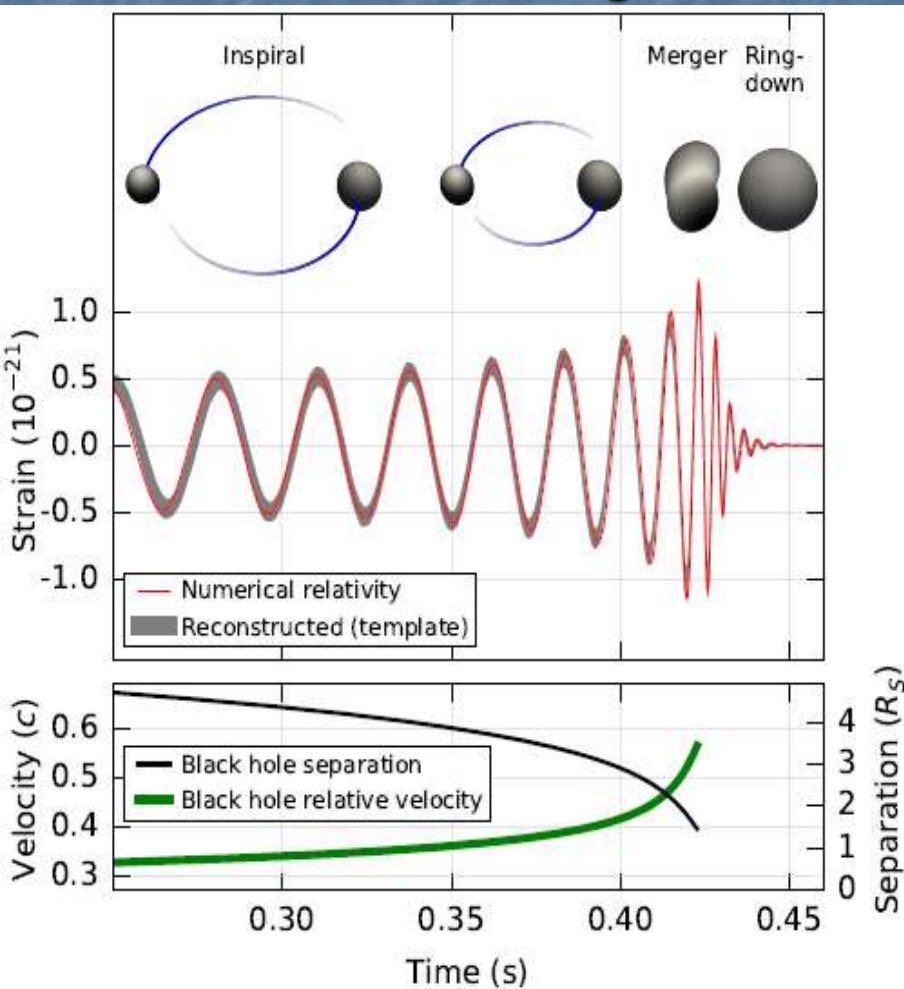
# Virgo detector – Cascina - Italy

- In bedrijf: 1 augustus 2017 – Eerste waarneming 14 aug.
- Twee armen van 3 km



# Botsing van twee zwarte gaten

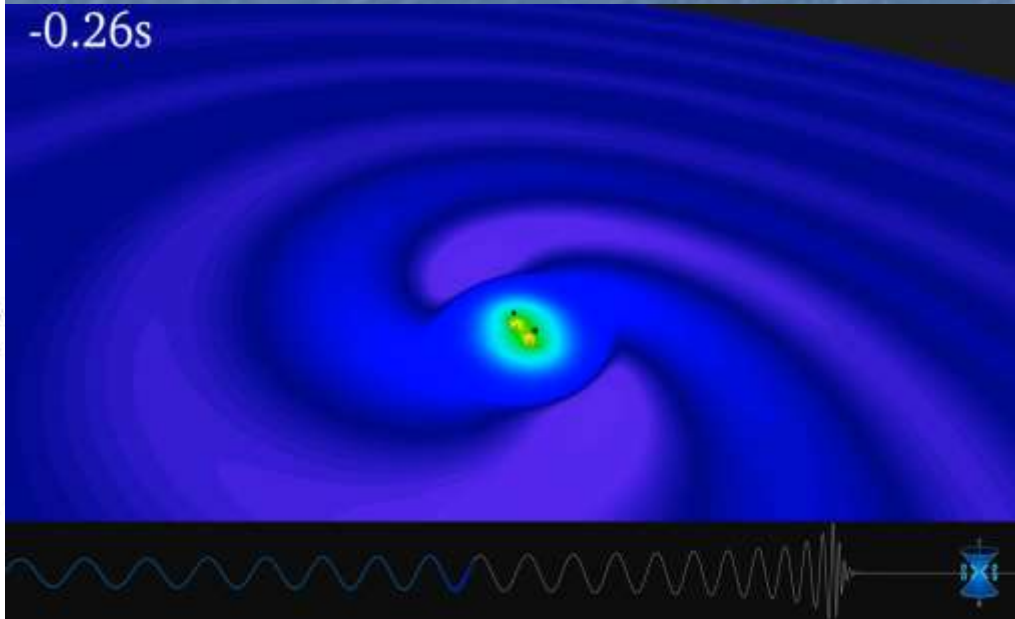
- Eerste waargenomen gravitatiegolf GW150914 op afstand van 1,4 miljard lichtjaar
- Zwarte gaten hadden massa's van 30 en 35 maal die van de zon. Na samensmelting ontstaat zwarte gat van 62 zonsmassa's



De verlenging/verkorting van de ruimte bedraagt circa  $1 \text{ m} / 10^{21} \text{ m}$

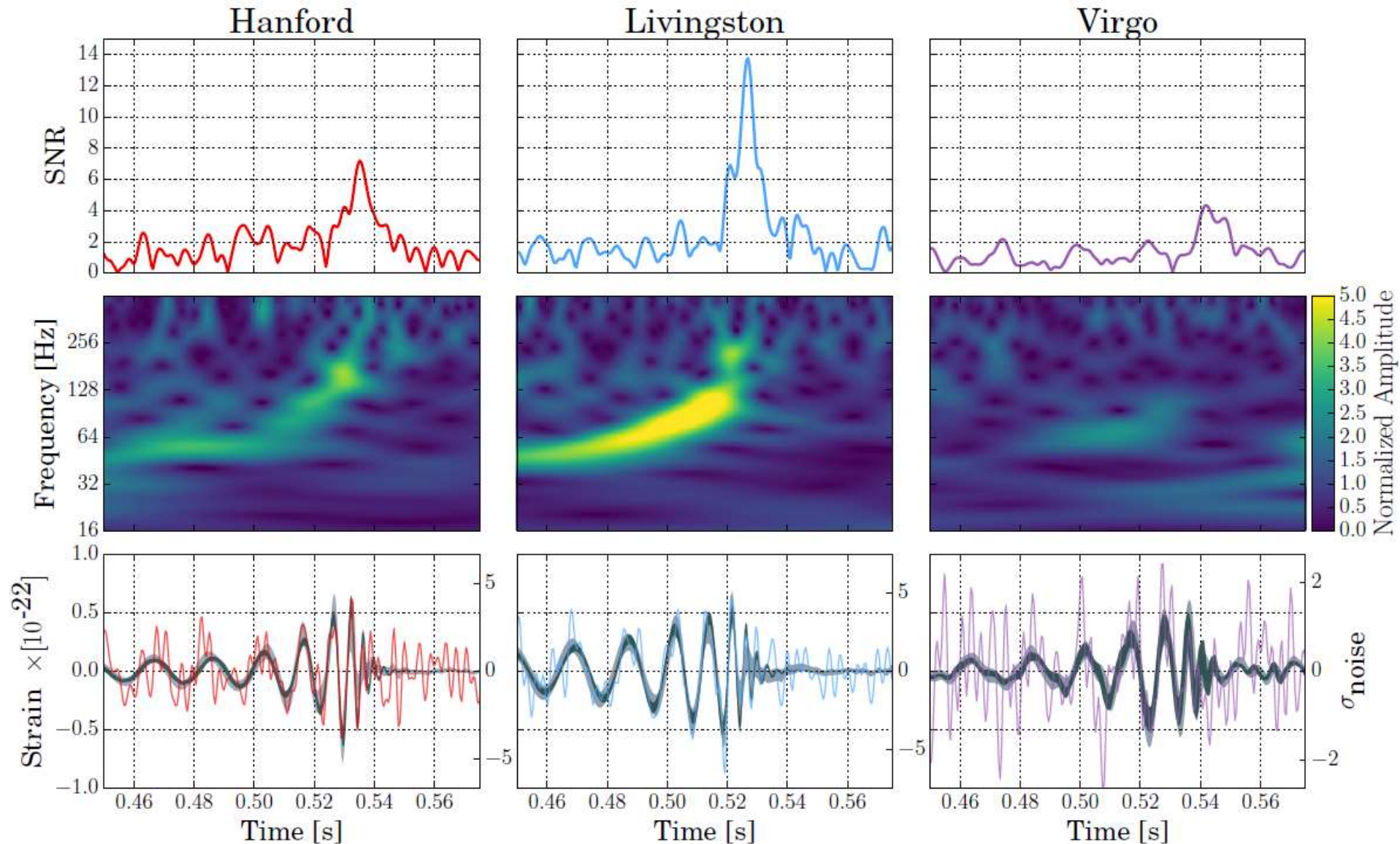
De botsing van zwarte gaten veroorzaakt geen elektromagnetische straling

-0.26s



# Eerste waarneming door 3 detectoren

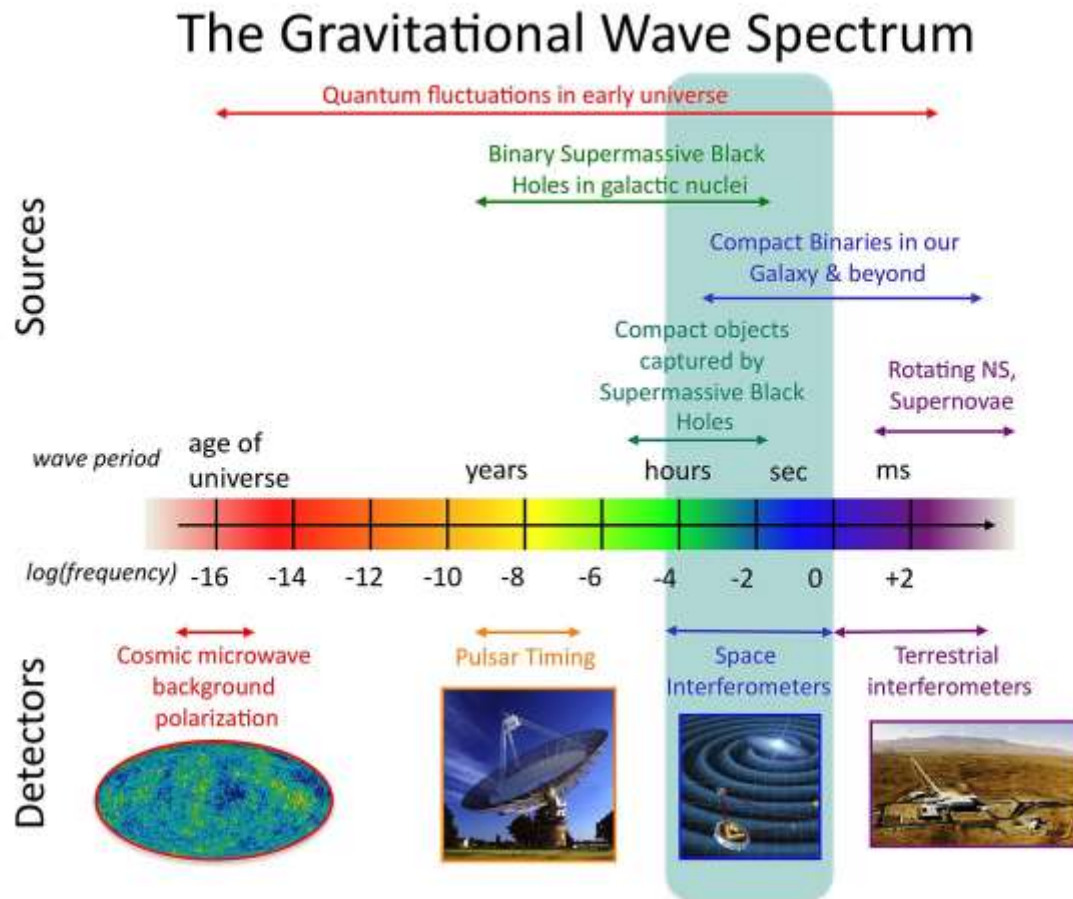
- Op 14 augustus 2017 botsing van zwarte gaten (GW170814)





# Soorten gravitatiegolven

- Gravitatiegolven ontstaan door versnellende massa's
- Relatie golflengte – frequentie:  $c = \lambda \nu$
- Frequenties van gravitatiegolven:  $10^{-16}$  - 100 Hz
- Veroorzakers: Supernovae, Roterende Zwarte gaten, Quantum Fluct



# Meetsignaal

- Eerste waargenomen gravitatiegolven: botsingen van 2 zwarte gaten van ca 30 zonsmassa's
- Gravitatiegolven hebben dan frequentie van  $\approx 100$  Hz
- Golflengte is dan:  $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{300.000}{100} = 3000$  km
- Armen van interferometer zouden lengte in die orde van grootte moeten hebben
- VIRGO detector armen hebben lengte 3 km en laserlicht wordt 300 maal gereflecteerd; daarmee meetlengte 900 km
- De te meten rek is ongeveer  $1 : 10^{21}$
- Over 900 km meet men dan dus verlenging van  $10^{-15}$  m ( $\approx$  afmeting van proton)

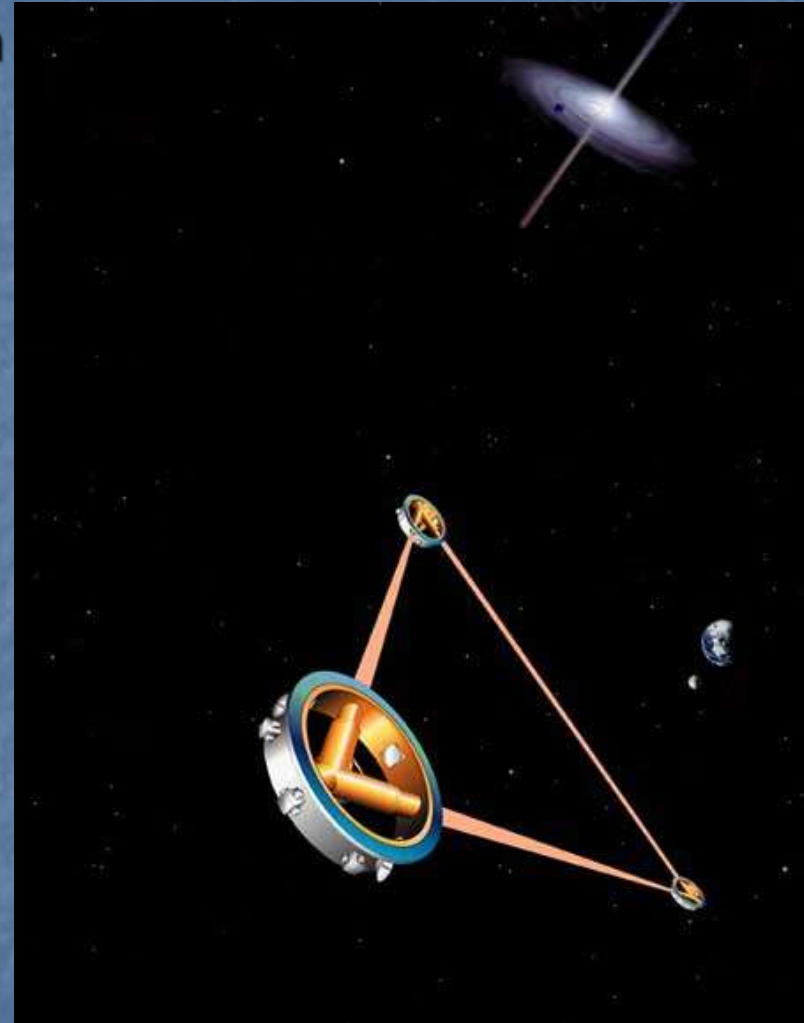


# Botsing van superzware zwarte gaten

- Superzware zwarte gaten in centra van sterrenstelsels zullen ook botsen
- Frequentie van dergelijke golven:  $\approx 0,001$  Hz
- Golflengte dan  $\approx 300$  miljoen km
- Detectorarmen van dergelijke lengte niet meer op aarde te realiseren
- Daarom ontwikkeling van ruimte-zwaartekrachtgolf detector LISA:

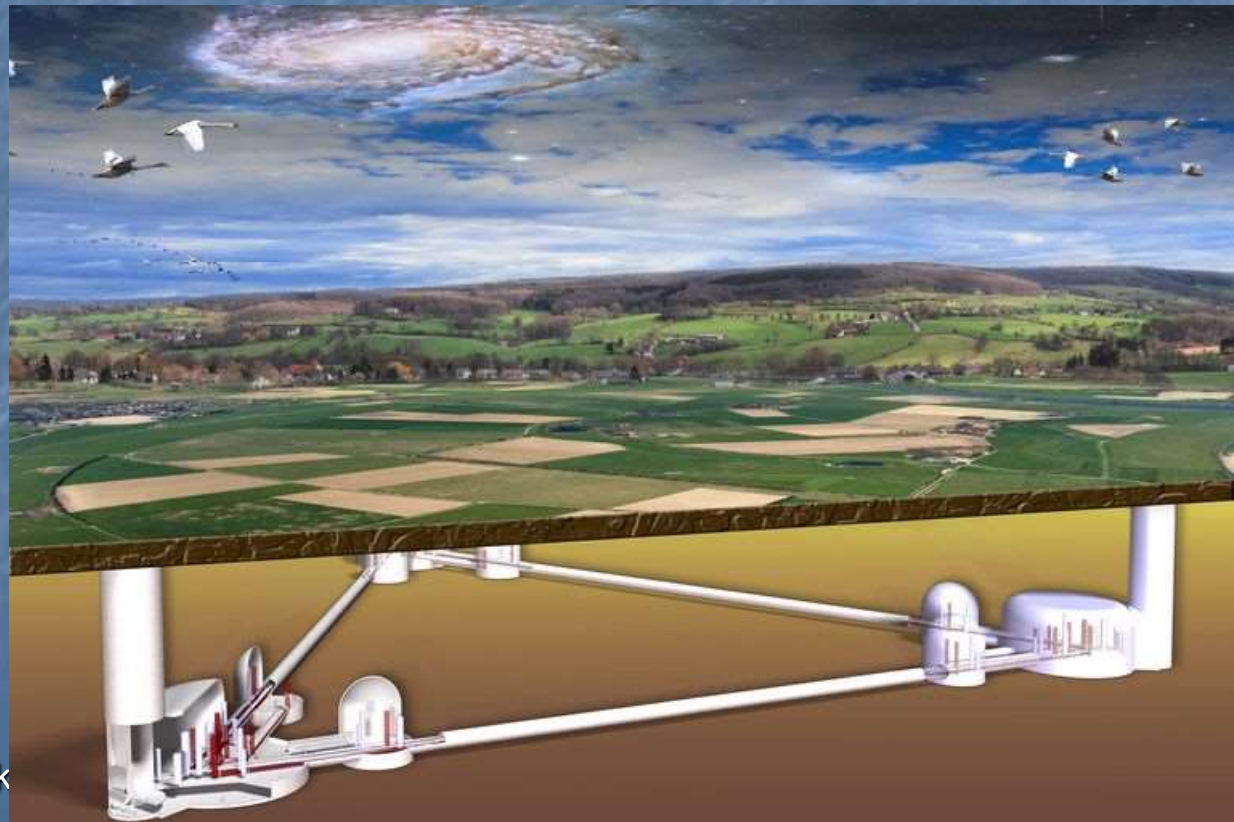
## Laser Interferometer Space Antenna

- Drie detectorstations op hoekpunten van gelijkzijdige driehoek met zijdelengte van 5 miljoen km, in L2 van aarde-zon systeem
- Na 2030, project ESA/NASA  
Relativiteit en Sterrenkunde



# Einstein Telescoop

- Derde generatie zwaartekrachtgolfdetector
- Sterk verbeterde gevoeligheid:
  - armlengte 10 km ipv 3 km
  - 250 – 300 m onder aardoppervlak; veel minder storende trillingen
- Mogelijke locaties:
  - Sardinië
  - Euregio Maas-Rijn
- Keuze in 2026
- In bedrijf 2035



# Betekenis gravitatiegolven

- Worden niet gedempt. Gaat blik geven op oerknal. Met elektromagnetische straling kunnen we niet verder terugkijken dan heelal leeftijd van 370.000 jaar
- Fundamentele natuurkunde, o.a.
  - Tests van de ART
- Kosmologie o.a.
  - Betrouwbaarder afstandsmetingen, niet langer afhankelijk van afstandsladder
  - Hubble constante (thans verschillende resultaten) : 67,4 km/s.Mpc volgens metingen aan de kosmische achtergrondstraling (Planck satelliet) en 73,0 volgens helderheidsmetingen metingen aan supernovae (o.a. Riess)
  - Aard van donkere materie en donkere energie
- Astrofysica o.a.
  - Verklaring vorming zware elementen
  - Ontstaan zware elementen



# Tot Slot: Relativiteit en Sterrenkunde

- Bepaling van hoge snelheden van (verre) objecten: klassieke Doppler effect geeft onjuist resultaat; tijddilatatie moet in rekening gebracht worden
- Kernfusie in sterren:  $E = mc^2$  Energie – massa equivalentie volgt uit de SRT
- Banen van sterren/planeten/stof/gas blijken af te wijken van voorspellingen volgens Newton wetten. Als voorbeeld: Mercurius heeft geen zuivere ellipsbaan. Perihelium verschuift. Alleen te verklaren met ART
- Zwaartekrachtlenzen en gravitatiegolven alleen te begrijpen en berekenen met ART
- Kosmologie: heelaluitdijing alleen goed te verklaren met ART. Niet alleen massa (baryonische en donkere massa) speelt rol, maar ook andere energievormen (straling en donkere energie) en ruimtekromming



# Literatuur

- \*\*\*Mirjana Dalarsson and Nils Dalarsson; Tensors, Relativity and Cosmology, ISBN: 0-12-200681-X
- \*A. Einstein; Einstein: mijn theorie, Over de speciale en algemene relativiteitstheorie,, ISBN 90-274-5758-1
- \*\*\*James B. Hartle; Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity, ISBN10: 1-292-03914-0
- \*Vincent Icke; Gravity Does Not Exist, A Puzzle for the 21<sup>st</sup> century, ISBN 978 90 8964 446 6
- \*Vincent Icke; Krachten, wat iedereen voelt en niemand begrijpt, Veen Media 2015
- \*Govert Schilling; Einsteins Gelijk, Een abc van zwaartekrachtgolven, ISBN 978 90 5956 699 6
- \*Govert Schilling; Ripples in Spacetime, Einstein, Gravitational Waves, and the Future of Astronomy, ISBN 978 06 7497 166 0
- \*\*Leonard Susskind and Andre Cabannes; General Relativity, the Theoretical Minimum, ISBN 978-0-241-56258-1
- \*\*\*Sean Carroll; Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity, ISBN10: 1-292-02663-4

\* Voor geïnteresseerde leek, zonder wis- en natuurkunde kennis

\*\* Voor techneut, die het een beetje wil "begrijpen", met basis wiskunde kennis (Propadeuse TU)

\*\*\* Voor degenen, die het echt willen "begrijpen"; met flink wat wis- en natuurkunde

