

Als het Groenlandse ijs smelt, stijgt het water in de Noordzee maar half

Korte voordracht voor de
Eigen Avond van Metius
op 26 april 2024

Piet Cijssouw



Eerder, maar in de vorm van een modelleringsopdracht, gehouden voor de Werkgroep Theoretische Sterrenkunde

- Eén van de “kantelpunten” bij de huidige
klimaatverandering betreft het snel stijgen van
de temperatuur in het Noordpoolgebied en het
risico op smelten van al het poolijs. Zee-ijs dat
smelt verhoogt de zeespiegel niet, maar land-ijs
wel. De Groenlandse ijskap, met een volume van
ongeveer $3.420.000 \text{ km}^3$, is hierbij cruciaal.



- Als dit ijs in zijn geheel zou smelten, dan levert dit (rekening houdend met een soortelijke massa van deze geperste sneeuw van 0,8 maal die van water) een hoeveelheid van ca. 2.740.000 km³ water op
- Het oppervlak van alle zeeën en oceanen op aarde is tesamen ongeveer $3,7 \cdot 10^8$ km².
- Als de ijsskap op Groenland in zijn geheel zou smelten, komt de zeespiegel wereldwijd dus ongeveer 7,4 m hoger te liggen. Maar bij ons niet: de verhoging blijft beperkt tot minder dan 3 m. Hoe zit dat? Waar blijft al dat water?

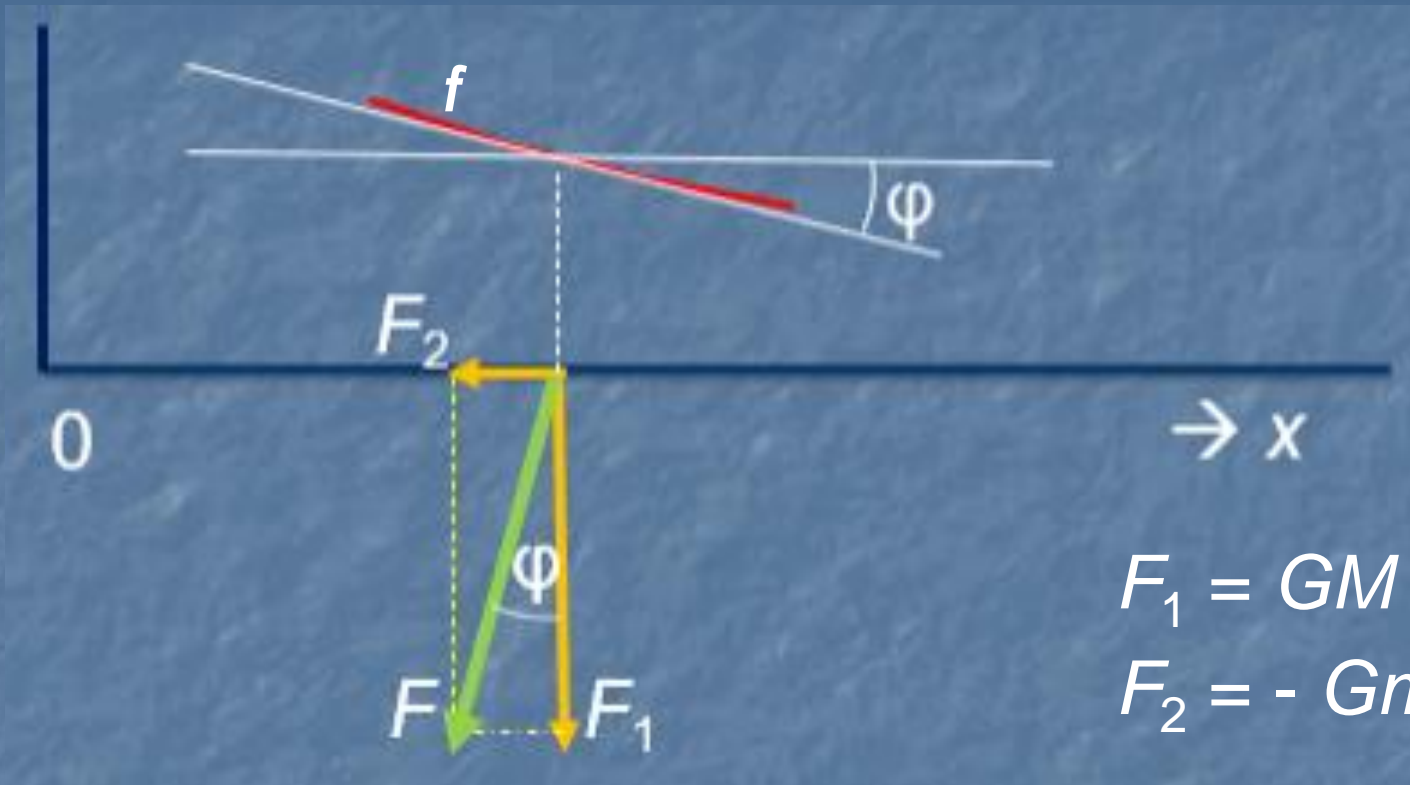


- De sleutel: de ijskap bevat zoveel massa, dat nu door de aantrekkingskracht ervan het zeewater in een uitgebreide omgeving van Groenland hoger is komen te liggen. Het zeewater in onze omgeving is dus nu “te hoog”. Het is het ongedaan maken van deze verhoging die er voor zorgt dat de globale verhoging van 7,4 m hier maar deels gevoeld wordt.
- We gaan nu wiskundig beschrijven hoe het zit met deze verhoging, en we zullen zien dat dit al met eenvoudige middelen tot een reeël resultaat leidt.



- Doe alsof de ijskap in Groenland een puntmassa is, met massa zeg m
- Doe alsof het aardoppervlak tussen Groenland en Nederland vlak (en horizontaal) is
- Laat M de massa van de aarde zijn, en R de straal van de aarde
- Laat $f(x)$ de functie zijn waarvan de grafiek het zeewaterprofiel voorstelt tussen Groenland ($x = 0$) en Nederland ($x = r$). Bepaal $f(x)$.





$$F_1 = GM / R^2$$

$$F_2 = - Gm / x^2$$

Het oppervlak van het zeewater moet loodrecht staan op de resultante F van beide krachten. Dus:

$$f'(x) = \tan \varphi = \frac{F_2}{F_1} = -\frac{Gm / x^2}{GM / R^2} = -\frac{mR^2}{M} \cdot \frac{1}{x^2}$$



Integreer, dit geeft

$$f(x) = \frac{mR^2}{M} \cdot \frac{1}{x} + c ; x \rightarrow \infty \text{ impliceert } c = 0, \text{ dus}$$

$$f(x) = \frac{m}{M} \cdot \frac{R^2}{x} \quad \text{en dus}$$

$$f(r) = \frac{m}{M} \cdot \frac{R^2}{r} .$$



$$f(r) = \frac{m}{M} \cdot \frac{R^2}{r}$$

- Vul nu reële waarden in:

de massa m van het ijs is even groot als de massa van de ontstane $2.740.000 \text{ km}^3$ smeltwater, dus

$$2,74 \cdot 10^6 \times 10^9 \times 10^3 \text{ kg}$$

ofwel $2,74 \cdot 10^{18} \text{ kg}$ (zie sheet 3).

Verder is $M =$ massa aarde $= 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$,

$R =$ straal aarde $= 6,36 \cdot 10^6 \text{ m}$,

$r =$ afstand van Groenland tot 'hier' $= 3,2 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Dit levert een opzet ter grootte van 5,8 m.

- In feite "zakt" de zeewaterspiegel dus met 5,8 m en stijgt hij met 7,4 m, resulterend in een stijging van maar 1,6 m .



Aanvulling na de voordracht

- Er waren twee aannames bij het maken van het model: het ijs kan beschouwd worden als een puntmassa, en het aardoppervlak tussen Groenland en "ons" is vlak en horizontaal.
- Zonder meer geavanceerde numerieke wiskundige berekeningen en veel meer informatie over de verdeling van het ijs over Groenland kunnen we ons model niet verbeteren. Maar we kunnen wel een eenvoudige schatting maken die laat zien, dat de "opzet" *ten minste* een nog relevante waarde heeft.
- Dat gaan we hierna doen.



Over de aanname dat het ijs als puntmassa kon worden behandeld

- Ieder ijsdeeltje heeft een afstand tot “ons”, en het effect van de aantrekkingskracht van zo'n deeltje op het verloop van het wateroppervlak tussen Groenland en ons is minstens zo groot als wanneer het ijsdeeltje is gesitueerd nog op Groenland, maar zo ver mogelijk van ons vandaan. Het gezamenlijke effect van alle ijsdeeltjes is dus minstens zo groot als het effect van één hypothetische ijsberg aan de uiterste andere zijde van Groenland. Doe dus alsof al het ijs de vorm van een puntmassa heeft aan de noord-westelijke rand van Groenland.



Over de aanname dat de oceaan tussen Groenland en “ons” vlak en horizontaal is

- Het aardoppervlak over een afstand van ruim 3.000 km is merkbaar gebogen. Dit maakt dat de “zijdelinkse” zwaartekracht ten gevolge van het Groenlandse ijs niet het volle effect heeft waarmee we hiervoor gerekend hebben: in feite is de richting van die zwaartekracht er één die “door de aarde heen gaat”, terwijl we alleen het effect langs het aardoppervlak moeten meerekenen. De eerder berekende zwaartekracht die het ijs veroorzaakt vervangen we dus door de (kleinere) component in de richting van het aardoppervlak.





Hiertoe berekenen we eerst de hoek γ tussen de raaklijn aan het aardoppervlak en de verbindingslijn van het punt x (ergens op het oppervlak) naar het punt 0 waarop de ijsmassa geconcentreerd wordt gedacht.

Wegens gelijkbenigheid van de driehoek $0-M-x$ is β gelijk aan

$$\frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \alpha) \text{ en dus } \gamma = 90^\circ - \beta = \frac{1}{2} \alpha$$



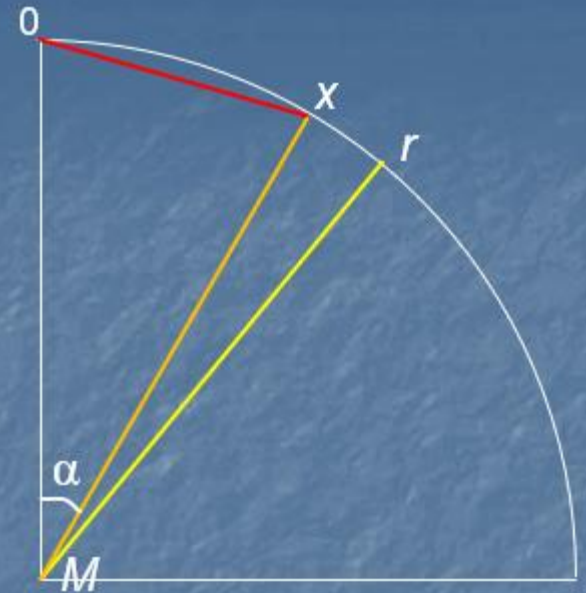


In het punt x zijn de volgende krachten werkzaam: de zwaartekracht F_1 (als vroeger), de aantrekkingskracht door het ijs F_2 maar daarvan is slechts de component F_{eff} van belang voor de berekening van de opzet van het water.

Merk op: de grootte van F_{eff} is die van F_2 vermenigvuldigd met $\cos \gamma$, ofwel vermenigvuldigd met $\cos \alpha/2$.



De boog van 0 (“achterkant” van Groenland) naar r (“ons”) langs het aardoppervlak heeft een lengte van ca. 3.900 km, in ieder geval minder dan 4.000 km. De kwart cirkelboog heeft een lengte van ca. 10.000 km. De fractie corresponderend met de hoek α is dus maximaal $4/10 \cdot 90^\circ$ ofwel 36° . Tussen 0° en 36° heeft de cosinus zijn kleinste waarde bij 36° , en $\cos 36^\circ \approx 0,809$. In de eerdere berekening vervangen we nu r door 4.000 km en gebruiken we de reductiefactor 0,809 om de schuin werkende aantrekkingskracht van de ijsmassa te verrekenen.



Invullen in de formule

$$f(r) = 0,809 \cdot \frac{m}{M} \cdot \frac{R^2}{r}$$

levert een bovengrens voor de opzet van 3,75 m.

Tesamen met een wereldwijde zeespiegelstijging van 7,4 m treedt er dus een daling in onze omgeving op van meer dan 3,75 m, resulterend in een lokale zeespiegelstijging van minder dan 3,65 m.

(opmerking: de correctie voor het niet vlak en horizontaal zijn van het aardoppervlak, zoals hier benaderd en uitkomend op de factor $\cos \alpha/2$, leent zich prima voor een numerieke behandeling, en zelfs, met behulp van een paar termen van de reeksontwikkeling van de cosinus, voor een benaderde analytische oplossing).

