Algemene Relativiteitstheorie[1]

De ART is een theorie van de zwaartekracht en als zodanig een uitbreiding van de Speciale Relativiteitstheorie, die alleen in inertiaalsystemen en dus in afwezigheid van de zwaartekracht geldig is. Centraal staat in de ART het ***equivalentie principe*** dat experimenteel getest kon worden in (i) metingen van de gravitationele roodverschuiving van spectraallijnen en (ii) van de afbuiging van licht door de zon. De ART leidt tot de Einstein vergelijkingen, die op hun beurt bevestigd konden worden door (iii) de correctie op de precessie van het perihelium van Mercurius om de Zon.

Samenhangend met het equivalentie principe is het begrip van een ***locaal inertiaal systeem***: een coördinatensysteem dat in een beperkt deel van de ruimte als een inertiaal systeem kan worden opgevat (waarin dus een vrij deeltje zich langs een rechte lijn beweegt). Voorbeelden zijn een lichaam in vrije val in een zwaartekrchtsveld of een satelliet in vrije val in zijn baan om de Aarde.

Het equivalentieprincipe zegt dat de wetten die binnen de SRT gelden, ook gelden in zo'n lokaal inertiaal systeem omdat in zo'n lokaal inertiaalsysteem de zwaartekracht niet waarneembaar is. Formeler gesteld:

> *In elk ruimte-tijd punt x^m van een willekeurig zwaartekrachtsveld is het mogelijk een locaal inertiaalstelsel $\{\xi^m\}$ te kiezen, zodanig dat - in een voldoend kleine omgeving van het punt x – de vergelijkingen die een bepaald natuurkundig gebeuren beschrijven ten opzichte van het stelsel $\{\xi^m\}$ dezelfde vorm hebben als in de speciale relativiteitstheorie.*

Wij zullen hieronder de voor de ART essentiële wiskundige bouwstenen in vogelvlucht behandelen. Gedetailleerde afleidingen zijn in de in voetnoot 1) genoemde dictaten te vinden.

1. Affiene connectie Γ^n_{kl} (Christoffel symbolen)

Volgens de SRT is in een (lokaal) inertiaalsysteem de 4-kracht op een deeltje met massa *m* in Cartesische coördinaten en gemeten in de eigen tijd τ gegeven door $f^j(\tau) = m\dfrac{d^2\xi^j(\tau)}{d\tau^2}$, waarin dus $f^0 = 0$. Voor een vrij deeltje is het rechterlid van de bewegingsvergelijking *0* :

$$\frac{d^2\xi^j(\tau)}{d\tau^2} = 0 \tag{1.1}$$

en de oplossing $\xi^j = a^j\tau + b^j$.

Wordt deze vrije beweging bezien in een *willekeurig* coördinatensysteem x^k *(k=0,1,2,3)*, dan transformeert de bewegingsvergelijking tot:

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\xi^j}{\partial x^k}\frac{dx^k}{d\tau}\right) = \frac{\partial\xi^j}{\partial x^k}\frac{d^2x^k}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^j}{\partial x^k\partial x^l}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau} .$$

Vermenigvuldiging met $\dfrac{\partial x^n}{\partial\xi^j}$ en gebruik makend van $\dfrac{\partial\xi^j}{\partial\xi^k}\dfrac{\partial x^n}{\partial\xi^j} = \delta^n_k$ vinden wij:

$$\frac{d^2x^n}{d\tau^2} + \Gamma^n_{kl}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau} = 0 . \tag{1.2}$$

---

1 Samengevat uit de collegedictaten van Dr. W.A. van Leeuwen, UvA (http://soliton.science.uva.nl/~leeuwen/art.pdf) en Prof.Dr. J.W. van Holten, VU/NIKHEF (http://www.nikhef.nl/~t32/vu.pdf) en uit Landau & Lifshitz, Course of Theoretical Physics, Vol 2: The Classical Theory of Fields (Pergamon Press)

Hierin zijn de ***affiene connecties*** $\Gamma^n_{k\,l}$ (ook Christoffel symbolen genoemd) gedefiniëerd als:

$$\boxed{\Gamma^n_{k\,l} \equiv \frac{\partial x^n}{\partial \xi^j}\frac{\partial^2 \xi^j}{\partial x^k \partial x^l}} \tag{1.3}$$

Deze 64 functies zijn symmetrisch in *k* en *l.* Er zijn dus in het algemeen 40 verschillende functies.
In een *vrijvallend systeem* moet (1.2) samenvallen met (1.1), dus moet

$$\boxed{\Gamma^n_{k\,l}(vrijvallend) = 0} \tag{1.4}$$

2. Metrische tensor g_{mn}

De eigentijd is in de SRT invariant gedefiniëerd als $(ds)^2 = c^2(d\tau)^2$. In Minkowski metriek (tensor $\eta_{i\,j}$) houdt dit in dat:

$$c^2(d\tau)^2 = \eta_{i\,j}\, d\xi^i\, d\xi^j \tag{2.1}$$

In willekeurige coördinaten x^m wordt dit geschreven als

$$c^2(d\tau)^2 = \eta_{i\,j}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}d\,x^m\frac{\partial \xi^j}{\partial x^n}d\,x^n \tag{2.2}$$

Definiëren wij de (algemene) metrische tensor als

$$g_{mn} \equiv \eta_{i\,j}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^n}\,, \tag{2.3}$$

dan zijn dus hetzelfde interval en de eigen tijd in willekeurige coördinaten gegeven door

$$\boxed{(ds)^2 = c^2(d\tau)^2 = g_{mn}\,d\,x^m\,d\,x^n} \tag{2.4}$$

Verder definiëren wij de ***inverse*** g^{nk} van g_{mn} door de betrekking

$$g_{mn}g^{nk} \equiv \delta^k_m \tag{2.5}$$

Zowel g_{mn} als g^{mn} zijn symmetrisch.

3. Verband affiene connectie en metrische tensor

Enig rekenwerk levert
$$\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l} = \Gamma^k_{l\,m}g_{kn} + \Gamma^k_{l\,n}g_{k\,m} \tag{3.1}$$

en
$$\boxed{\Gamma^k_{l\,m} = \frac{1}{2}g^{n\,k}\left(\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ln}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{l\,m}}{\partial x^n}\right)} \tag{3.2}$$

In een vrijvallend systeem zijn de termen tussen de haken op grond van (3.1) alle *0* .

4. Gedrag van een vrij deeltje bij lage snelheid in een zwak stationair veld

In dit geval is $\frac{d\boldsymbol{r}}{d\,t}$ te verwaarlozen tov $\frac{c\,dt}{d\tau}$, zodat in (1.2) alleen de x^0 -component van x^k en x^l van belang is. Op grond van (i) stationariteit reduceert in (1.2) bovendien de term $\Gamma^m_{00} = \frac{1}{2}g^{mn}\left(\frac{\partial g_{0n}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0n}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^n}\right)$ tot $\Gamma^m_{00} = -\frac{1}{2}g^{mn}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^n}$. Nemen wij nu aan (ii) dat in een zwak veld de afwijking h_{mn} van metrische tensor tov de constante Minkowski tensor gering is, dan is $\Gamma^m_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{mn}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^n}$. De bewegingsvergelijking (1.2) is hiermee

$$\frac{d^2x^m}{d\tau^2} - \frac{1}{2}c^2\eta^{mn}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^n}\left(\frac{d\,t}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{4.1}$$

De tijdcomponent levert $\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$ en dus is $\frac{dt}{d\tau}$ constant. Uit de ruimtelijke termen volgt dan met $\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{d\tau^2} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2}$:

$$\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{1}{2} c^2 \nabla h_{00} \tag{4.2}$$

Vergelijkenwij dit met het Newtonse resultaat $\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = -\nabla \Phi$, dan stellen wij $h_{00} = \frac{2}{c^2} \Phi$ (afgezien van een constante die *0* moet worden gesteld gezien het gedrag in ∞).

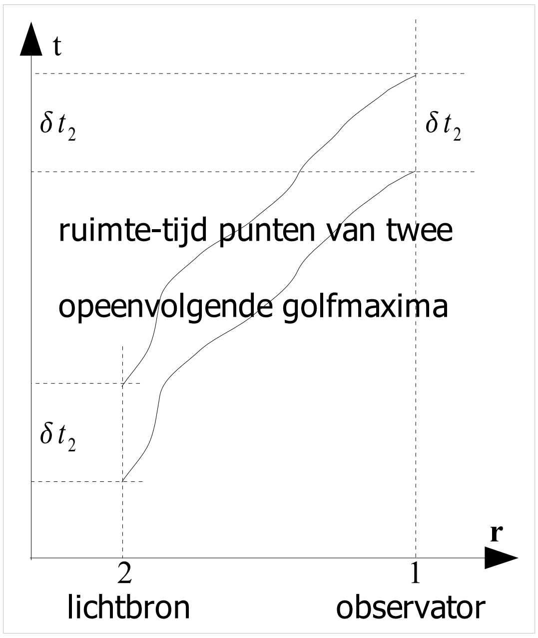
Met $\Phi = -G \frac{M}{r}$ vinden wij ten slotte

$$\boxed{g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \tag{4.3}$$

5. Gravitationele tijddilatatie en frequentieverschuiving

Wij beschouwen een bewegende klok in een zwaartekrachtsveld en meten de tikken van de klok in een lokaal inertiaalsysteem. Dan geldt volgens het equivalentieprincipe de SRT-relatie tussen eigen tijd van de klok en de waargenomen tijd $c\, d\tau = \sqrt{\eta_{mn} d\xi^m d\xi^n}$,of zoals wij eerder zagen in algemene coördinaten: $c\, d\tau = \sqrt{g_{mn} dx^m dx^n}$. Deling door *dt* levert $c \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{g_{mn} \frac{dx^m}{dt} \frac{dx^n}{dt}}$, zodat voor een klok in rust geldt dat alleen de termen $m = n = 0$ meedoen en dat

$$\boxed{dt = \frac{d\tau}{\sqrt{g_{00}(x)}}} \tag{5.1}$$



Wij willen nu de frequentieverschuiving bepalen van monochroom licht uit een bron in punt P_2 , dat wordt waargenomen door een observator ter plaatse P_1 . Laten P_1 en P_2 hierbij in rust zijn in een stationair gravitatieveld en laat $d\tau$ de (eigen) tijd tussen 2 maxima zijn in een vrijvallend stelsel.

Achtereenvolgende maxima komen uit P_2 met dezelfde vertraging aan in P_1 , dus meet de observator in P_1 dezelfde tijd $d\, t_2$ als een denkbeeldige, rustende observator in punt P_2 zou meten, nl. $dt_2 = d\tau / \sqrt{g_{00}(x_2)}$. Echter met eenzelfde monochrome lichtbron in P_1 zou de observator in P_1 de tijd $dt_1 = d\tau / \sqrt{g_{00}(x_1)}$ hebben gemeten.

De frequenties verhouden zich dus als:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{dt_1}{dt_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(x_2)}{g_{00}(x_1)}} \tag{5.2}$$

Met (4.3) wordt dit voor zwakke velden:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{dt_1}{dt_2} = \sqrt{\frac{1-\dfrac{2GM_2}{c^2 r_2}}{1-\dfrac{2GM_1}{c^2 r_1}}} \approx\ 1-\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) \tag{5.3}$$

zodat de relatieve verschuiving is:

$$\boxed{\frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_1} \approx -\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)} \tag{5.4}$$

Wordt geobserveerd op $r_2 > r_1$, dan treedt een frequentieverlaging ("redshift") op. Op afstand ∞ van de Zon ($M_1 = M_2 = M_z = 1.98\times10^{30}$, $R_z = 6.9\times10^{8}$, $G = 6.7\times10^{-11}$, $c = 3\times10^{8}$) is de relatieve frequentieverschuiving van zonlicht -2×10^{-6} .
Als dit licht op Aarde wordt geobserveerd, dan levert de massa M_2 van de Aarde een heel klein compenserend effect, maar gezien de massa en straal van de Aarde ($M_a = 6\times10^{24}$, $R_a = 6.4\times10^{6}$) is dit effect verwaarloosbaar.

6. Tensor-analyse

1. Scalarveld Φ : in het stelsel $\{x^m\}$ is de afgeleide $U_m = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^m}$, in $\{x'^m\}$ is deze $U'_m = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x'^m}$. Omdat $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x'^m} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^n}\dfrac{\partial x^n}{\partial x'^m}$ is dus
$$U'_m = \frac{\partial x^n}{\partial x'^m} U_n \tag{6.1}$$
Een grootheid die op deze wijze transformeert heet een ***covariante*** *vector.*

2. Een coördinatenverschil transformeert als een ***contavariante*** *vector:*
$$d\,x'^m = \frac{\partial x'^m}{\partial x^n} d\,x^n \tag{6.2}$$

3. Een tensor van het *type (r,s)* is van de contravariante graad *r* en covariante graad *s* en transformeert voor ieder van de *r* bovenindices als een contravariante vector en voor ieder van de *s* benedenindices als een covariante vector. Bijvoorbeeld de gemengde tensor:
$$T'^{l\,n}_{\ m} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^n}{\partial x^k} T^{i\,k}_{\ j} \tag{6.3}$$

4. De metrische tensor $g_{mn} = \eta_{ij}\dfrac{\partial\xi^i}{\partial x^m}\dfrac{\partial\xi^j}{\partial x^n}$ is dus covariant. In een ander coördinaten systeem is deze
$$g'_{mn} = \eta_{ij}\frac{\partial\xi^i}{\partial x'^m}\frac{\partial\xi^j}{\partial x'^n} = \eta_{ij}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}\frac{\partial\xi^j}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial x'^n} = g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}\frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \tag{6.4}$$
Dit laat zien dat de metrisch tensor inderdaad volgens de regel (6.3) transformeert

5. De inverse metrische tensor, gedefiniëerd door (2.5), is contravariant, symmetrisch en transformeert naar een ander coördinatensysteem volgens:

$$g'^{mn} = g^{kl} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \frac{\partial x'^n}{\partial x^l} \tag{6.5}$$

6. De Kronecker delta functie is een gemengde tensor die in elk coördinatensysteem dezelfde componenten houdt, want

$$\delta'^k_l = \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^l} \delta^m_n = \delta^k_l \tag{6.6}$$

Met de hier getoonde resultaten is de invariantie van tensoren eenvoudig in te zien. Als voorbeeld nemen wij het product:

$$U'^m{}_n U'_m{}^n = \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} U^k{}_l \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} U_i{}^j = \delta^i_k \delta^l_j U^k{}_l U_i{}^j = U^k{}_j U_k{}^j .$$

7. Tensor algebra

1. Een *lineare combinatie* van twee tensoren van het type *(r,s)* is weer een tensor van hetzelfde type:

   als $T^m{}_n = a A^m{}_n + b B^m{}_n$, dan is $T'^m{}_n = \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x'^n} T^i{}_j$ (7.1)

2. Het *directe product* van twee tensoren is weer een tensor die alle boven- en onderindices van de twee tensoren als bovenindices en onderindices heeft:

$$T^k{}_l{}^m = A^k{}_l B^m \tag{7.2}$$

3. Als een benedenindex en een bovenindex aan elkaar gelijk worden gesteld (en dus gesommeerd wordt over de 4 waarden ervan), ontstaat een tensor met twee indices minder. Dit proces wordt contractie genoemd:

$$T^{km} = T^k{}_l{}^{ml} \tag{7.3}$$

4. Bij het product van de metrische tensor g_{mn} met een contravariante vector of een gemengde tensor, dan is na contractie over één van de onderindices van g_{mn} in het product een contravariante index vervangen door een covariante (de betreffende bovenindex wordt "omlaag gehaald"):

$$S_k{}^l{}_m = g_{kn} T^{nl}{}_m \tag{7.4}$$

5. Op dezelfde manier gaat dit voor het product van de inverse metrische tensor g^{mn} en een covariante vector of gemengde tensor (hier wordt de betreffende onderindex "omhoog gebracht"):

$$R^{kl}{}_m = g^{kn} S_n{}^l{}_m \tag{7.5}$$

   Passen wij regel (7.4) en (7.5) achtereenvolgens toe, dan wordt de oorspronkelijke tensor $T^{nl}{}_m$ weer teruggewonnen:

$$R^{kl}{}_m = g^{kn} S_n{}^l{}_m = g^{kn} g_{nj} T^{jl}{}_m = \delta^k_j T^{jl}{}_m = T^{kl}{}_m$$

Wij zien dus dat wij door het omhoog of omlaag halen van indices dezelfde tensor op 2^N ***manieren kunnen schrijven. Al deze tensoren bevatten dezelfde informatie; hierom wordt in het algemeen hetzelfde symbool voor al deze tensoren gebruikt.***

6. De gemengde metrische tensor is gelijk aan de Kronecker delta operator:

$$g^m{}_n = g^{ml} g_{ln} = \delta^m_n \tag{7.6}$$

7. Een volume-element $d\,\Omega$ in de ruimte-tijd $\{x^m\}$ transformeert naar een overeenkomstig volume-element in $\{x'^m\}$ volgens
$$d\,\Omega' \sqrt{-g'} = \sqrt{-g}\, d\,\Omega \tag{7.7}$$
waarin $g \equiv det(g_{mn})$ en $g' \equiv det(g'_{mn})$ de respectievelijke determinanten voorstellen. Het volume-element $\sqrt{g}\, d\,\Omega$ is ***invariant***.
Deze relatie is van belang bij het transformeren van integralen in de ART.

8. Bij het transformeren van de affiene connectie $\Gamma^n{}_{kl} \equiv \dfrac{\partial x^n}{\partial \xi^j} \dfrac{\partial^2 \xi^j}{\partial x^k \partial x^l}$ blijkt dat
$$\Gamma'^l{}_{mn} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} \Gamma^i_{jk} + \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^m \partial x'^n} \tag{7.8}$$
Door de tweede term rechts is $\Gamma'^l{}_{mn}$ geen tensor. Dit bleek ook al uit het feit dat $\Gamma^n{}_{kl} = 0$ in de SRT (tussen inertiaalsystemen): ***als deze affiene connectie een tensor was, zou hij dan ook 0 moeten zijn in elk willekeurig ander coördinatensysteem, wat in het algemeen zeker niet waar is.***
Dit laat zien dat niet iedere grootheid met onder en/of bovenindices een tensor hoeft te zijn.
Uit (7.8) kunnen wij zien dat voor een lokaal inertiaalsysteem de affiene connectie *0* kan worden gemaakt door een geschikte transformatie. Hebben de $\Gamma'^l{}_{mn}$ bijvoorbeeld in de oorsprong van dit coördinatensysteem de waarde $(\Gamma'^l{}_{mn})_0$, en transformeren wij volgens $x^i = x'^i + \frac{1}{2}(\Gamma'^l{}_{mn})_0 x'^m x'^n$, dan wordt in (7.8) de term $\left(\dfrac{\partial x'^l}{\partial x^i} \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x'^m \partial x'^n}\right)_0$ gelijk aan $(\Gamma'^l{}_{mn})_0$, zodat de $\Gamma^i{}_{jk} = 0$ moeten zijn.

9. Wordt een contravariante vector V^m gedifferentiëerd met de operator $\dfrac{\partial}{\partial x^n}$, dan is het resultaat niet weer een tensor. Om de afgeleide toch een tensor te maken is het nodig het proces van differentiëren in willekeurige coördinatensystemen te veralgemeniseren. Hiervoor is de zgn. ***covariante afgeleide van de contravariante vector*** V^m ingevoerd, die wél als een tensor transformeert. Deze wordt aangegeven door $V^m_{;n}$ en is gedefiniëerd als[2]:
$$\boxed{V^m_{;n} \equiv \frac{\partial V^m}{\partial x^n} + \Gamma^m{}_{nk} V^k} \tag{7.9}$$
Omdat in een in een (lokaal) inertiaalsysteem de affiene connecties *0* zijn[3], is daar de covariante afgeleide identiek gewone afgeleide. Deze laatste is dus een speciaal geval van de algemenere covariante afgeleide.
Deze eigenschap én het feit dat de covariante afgeleide van een tensor weer een tensor oplevert maken deze operator een belangrijk element van de ART.

10. Op dezelfde wijze wordt met $V_{m;n}$ de *covariante afgeleide van een covariante vector* aangeduid en gedefiniëerd als:

2 Zie ook Landau & Lifschitz, Classical Theory of Fields, para 85 ev
3 In het geval van inertiaalsystemen geval zijn de relaties tussen x^m en ξ^m immers lineair

$$\boxed{V_{m;n} \equiv \frac{\partial V_m}{\partial x^n} - \Gamma^k{}_{mn} V_k} \tag{7.10}$$

11. Met (7.9) en (7.10) kan ook de covariante differentiatie $T^{kl}{}_{m;n}$ van een tensor worden bepaald:

$$T^{kl}{}_{m;n} = \frac{\partial}{\partial x^n} T^{kl}{}_m + \Gamma^k_{in} T^{il}{}_m + \Gamma^l_{in} T^{ik}{}_m - \Gamma^i_{mn} T^{mn}{}_i \tag{7.11}$$

12. Regels voor de covariante afgeleide:
    - dezelfde als voor de gewone afgeleide bij lineaire combinaties en producten van tensoren:
        1. $\left(\alpha A^m{}_n + \beta B^m{}_n\right)_{;k} = \alpha A^m{}_{n;k} + \beta B^m{}_{n;k}$
        2. $\left(A^l B^m{}_n\right)_{;k} = A^l{}_{;k} B^m{}_n + A^l B^m{}_{n;k}$
    - de covariante afgeleide van een contractie is gelijk aan de contractie van de covariante afgeleide:

      $$T^{kl}{}_{l;n} = \frac{\partial}{\partial x^n} T^{kl}{}_l + \Gamma^k_{in} T^{il}{}_l$$

13. Verder zijn $g_{mn;k} = 0$, $g^{mn}{}_{;k} = 0$ en $g^m{}_{n;k} = \delta^m{}_{n;k} = 0$

14. Hierdoor zijn covariante differentiatie en indices omhoog of omlaag halen commuterende operaties: $V^m_{;k} = g^{mn} V_{n;k}$

8. Gradiënt, rotatie en divergentie

1. Voor een scalar is de covariante afgeleide gelijk aan de gewone. Dus ook voor de gradiënt is er geen verschil:

   $$S_{;m} = \frac{\partial S}{\partial x^m} \tag{8.1}$$

   (het rechterlid wordt vaak aangeduid met $S_{,m}$)

2. In de *covariante rotatie* van een *covariante* vector vallen de termen met affiene connecties paarsgewijs weg, zodat ook hier de covariante rotatie gelijk is aan de gewone rotatie:

   $$V_{m;n} - V_{n;m} = \frac{\partial V_m}{\partial x^n} - \frac{\partial V^n}{\partial x^m} \tag{8.2}$$

3. De *covariante divergentie* van een contravariante vector $V^m_{;m} = \dfrac{\partial V^m}{\partial x^m} + \Gamma^m_{lm} V^l$

   behoeft een wat lastige uitwerking van Γ^m_{lm} met als resultaat

$$\Gamma^m_{l\,m} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{(-g)}}{\partial x^l}\,, \tag{8.4}$$

waarmee wij vinden:

$$V^m_{\;;m} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\left(\sqrt{(-g)}\,V^m\right)}{\partial x^m} \tag{8.5}$$

Hiermee is in covariante vorm de stelling van Gauss voor een veld V^m dat op grote afstand naar 0 gaat[4]:

$$\int V^m_{\;;m} \sqrt{(-g)}\, d\,\Omega = \int \frac{\partial\left(\sqrt{(-g)}\,V^m\right)}{\partial x^m}\, d\,\Omega = 0 \tag{8.6}$$

4. Op dezelfde manier is de covariante divergentie van een tensor

$$T^{m\,n}{}_{;m} = \frac{\partial T^{mn}}{\partial x^m} + \Gamma^m_{lm} T^{l\,n} + \Gamma^n_{lm} T^{ml} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\left(\sqrt{(-g)}\,T^{mn}\right)}{\partial x^m} + \Gamma^n_{lm} T^{ml} \tag{8.7}$$

9. Principe van algemene covariantie

Een vergelijking is *algemeen covariant* als hij dezelfde vorm behoudt na een willekeurige coördinatetransformatie. Met dit begrip wordt het *principe van algemene covariantie* geïntroduceerd:
Als nu een vergelijking (i) geldig is binnen de SRT (waar de metrische tensor gelijk is aan de Minkowski tensor η_{mn} en de affiene connecties alle *0* zijn) en (ii) algemeen covariant is, dan is deze vergelijking ook geldig in aanwezigheid van zwaartekracht.

Dit principe leidt tot een handig recept om formules uit de SRT te vertalen naar de ART

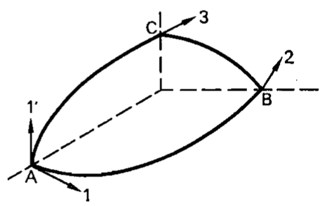
(i) Schrijf de vergelijking in de SRT in tensor-vorm op

(ii) Vervang de speciale metrische tensor η_{mn} door de algemene g_{mn}

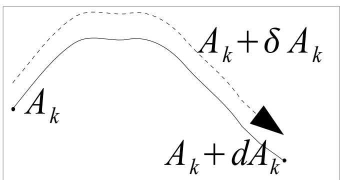
(iii) Vervang alle gewone afgeleiden door covariante afgeleiden

Dit principe is een uitvloeisel van het equivalentieprincipe. Dit stelt immers dat in een willekeurig zwaartekrachtsveld altijd een lokaal inertiaalsysteem kan worden gedefiniëerd waarin plaatselijk de SRT geldt. Een algemeen covariante vergelijking laat zich dan tussen het lokale inertiaalsysteem en het zwaartekrachtsveld heen en weer transformeren zonder aan geldigheid in te boeten.

10. Kromming van de ruimte-tijd



1. <u>Kromming</u>
Wij bekijken de covariante afgeleiden (7.9) of (7.10) nader. Op grond van (7.10) kan de covariante differentiaal van een covariante vector als $D\,A_k \equiv dA_k - \Gamma^i{}_{k\,l} A_i\, dx^l$ geschreven worden. De twee bijdragen worden als volgt geïnterpreteerd. De eerste term, dA_k, representeert de gewone verandering van de component *k* als gevolg van de veranderde waarde van het vectorveld op een afstand dx^l van het beginpunt. Verder moeten de vectoren *op het punt* $x^l + dx^l$ met elkaar worden vergeleken door eerst de vector op x^l *parallel* te verplaatsen naar $x^l + dx^l$, waardoor (ii) de term $\delta A_k \equiv \Gamma^i{}_{kl} A_i\, dx^l$ (10.1)



parallele verschuiving

4 Op grond van (7.7) moet voor het invariante 4-volume element worden geschreven $\sqrt{(-g)}\,d\,\Omega$

ontstaat als gevolg deze parallele verplaatsing in het gekromde, willekeurige coördinatesysteem. Het is in dit beeld dan ook duidelijk dat in een Minkowski stelsel deze laatste term wegvalt.

Om de parallele verplaatsing langs een gesloten contour in de ruimte-tijd te berekenen, gebruiken wij het *theorema van Stokes* dat de relatie geeft tussen de lijnintegraal langs de contour en de oppervlakteintegraal over de contour in de 4-ruimte[5]:

$$\boxed{\oint V_i dx^i = \int \frac{\partial V_m}{\partial x^l} df^{lm} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{\partial V_m}{\partial x^l} - \frac{\partial V_l}{\partial x^m} \right) df^{lm}} \tag{10.2}$$

Nemen wij voor $V_i dx^i$ nu δA_k volgens (10.1), dan wordt (10.2):

$$\oint \delta A_k = \oint \Gamma^i{}_{kl} A_i \, dx^l = \frac{1}{2}\int \left(\frac{\partial (\Gamma^i_{km} A_i)}{\partial x^l} - \frac{\partial (\Gamma^i_{kl} A_i)}{\partial x^m} \right) df^{lm}$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} A_i - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} A_i + \Gamma^i_{km} \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^i_{kl} \frac{\partial A_i}{\partial x^m} \right) df^{lm}$$

Met $\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n$ volgens (10.1)vinden wij zo langs een infinitesimaal klein contourtje voor ΔA_k :

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i_{klm} A_i \, \Delta f^{lm} \tag{10.3}$$

waarin R^i_{klm} de *krommingstensor* ("*Riemann-Christoffel tensor*") voorstelt:

$$\boxed{R^i_{klm} = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^n_{km} \Gamma^i{}_{nl} - \Gamma^n_{kl} \Gamma^i{}_{nm} \right)} \tag{10.4}$$

Het resultaat ΔA_k in (10.3) geeft aan hoeveel de vector A_k na een parallele verplaatsing langs het gesloten contourtje afwijkt van zichzelf aan het begin van een volledige rondgang.
Als de ruimte niet gekromd is, geldt $R^i_{klm}=0$, omdat bij een geschikte keuze van het coördinatenstelsel alle $\Gamma^i_{kl}=0$ zijn te maken. Maar als een tensor *0* is in één coördinatenstelsel, is hij *0* in een willekeurige ander coördinatenstelsel, zodat ook daar $R^i_{klm}=0$ blijft.
Omgekeerd geldt ook als $R^i_{klm}=0$, dat de ruimte vlak is. Er is dan immers een stukje lokale Minkowski ruimte te vinden, vanwaaruit wij dmv parallele verplaatsing en met $\Delta A_k=0$ deze vlakke ruimte kunnen uitbreiden over de hele ruimte.

2. Eigenschappen van de krommingstensor

- Bewezen kan worden dat R^i_{klm} de *enige* tensor is die uit de metrische tensor en zijn eerste en tweede afgeleiden kan worden gevormd
- Volledig covariant geschreven: $R_{iklm} = g_{in} R^n_{klm}$ (10.5)
- R_{iklm} is antisymmetrisch in elk van de index paren *i,k* en *l,m* en symmetrisch voor verwisseling van paren onderling:

5 In de 4-ruimte is de tensor df^{km} het infinitesimale oppervlakte element. De componenten ervan zijn de projecties ervan op de coördinaatvlakken.

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml} \text{ en } R_{iklm} = R_{lmik} \tag{10.6}$$

Componenten van R_{iklm} waarvan $i=k$ of $l=m$, zijn dus *0*

- Voor R_{iklm} (en R_{iklm}) geldt de identiteit $R_{iklm} + R_{imlk} + R_{ilmk} = 0$ (10.7)
- Belangrijk is de *Bianchi identiteit*: $R^n_{ikl;m} + R^n_{imk;l} + R^n_{ilm;k} = 0$ (10.8)
- De *Ricci tensor*: $R_{ik} = g^{lm} R_{limk} = R^m{}_{imk}$, (10.9)
  waarbij contractie over de index m optreedt. De Ricci tensor is symmetrisch: $R_{ik}=R_{ki}$. Uitgewerking levert:

$$\boxed{R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}} \tag{10.10}$$

- De invariante *scalaire kromming van de ruimte R*:

$$\boxed{R = g^{ik} R_{ik} = R^k{}_k = g^{km} g^{il} R_{iklm}} \tag{10.11}$$

Bewezen kan worden dat *R* de *enige* scalar is die (in 4 dimensies) uit R_{iklm} kan worden gevormd

11. Aktiefunctie van het zwaartekrachtsveld S_g

S_g moet worden uitgedrukt als een integraal van een scalaire functie over de hele ruimte en tussen twee bepaalde tijdstippen. Omdat de vergelijkingen van het zwaartekrachtveld hieruit worden verkregen door variatie van g_{mn}, mag de integrand geen hogere dan de eerste afgeleide van g_{mn} bevatten opdat de veldvergelijkingen geen hogere afgeleiden dan de tweede bevatten.
Nu is, afgezien van een opzichzelf staande constante (hier $-2C$ gekozen), *R* de enige scalar die uit g_{mn} en zijn eerste afgeleiden kan worden gevormd[6], dus $S_g = \int (R-2C)\sqrt{-g}\, d\Omega$ en

$$\begin{aligned} \delta S_g &= \delta \int (R-2C)\sqrt{-g}\, d\Omega = \int \big((R-2C)\,\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\,\delta R\big) d\Omega \\ &= \int \left(-(R-2C)\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ik}\,\delta g^{ik} + \sqrt{-g}\,\delta(g^{ik}R_{ik})\right) d\Omega \\ &= \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R\, g_{ik} + C\, g_{ik}\right)\sqrt{-g}\,\delta g^{ik}\, d\Omega + \int \sqrt{-g}\, g^{ik}\,\delta R_{ik}\, d\Omega \end{aligned} \tag{11.1}$$

Uitwerking van de laatste integraal levert *0* op. Voor de lege ruimte blijkt het zwaartekrachtsveld dus te voldoen aan de vergelijking:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R\, g_{ik} + C\, g_{ik} = 0 \tag{11.2}$$

Merk op dat de dimensie van de termen in (11.2) en van δS_g zelf $[m^{-2}]$ is.

12. Aktiefunctie van het materiële systeem S_m

Onder materie wordt hier de energie en impuls zoals die is verdeeld in de ruimte, dus van massa en straling. Zoals eerder bij de SRT wordt ook hier S_m uitgedrukt als de integraal van de Lagragne dichtheids functie over de hele 4-ruimte begrensd door de hypervlakken op twee bepaalde tijdstippen:

---

6 *R* bevat weliswaar ook tweede afgeleiden van g_{mn}, maar deze vallen bij de uitwerking van δS_g in (11.1) weg door het verdwijnen van de laatste integraal over $\sqrt{-g}\; g^{ik}\,\delta R_{ik}$. Zie van Holten (hoofdstuk 4) voor deze bewering en voor de afleiding van $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ik}\,\delta g^{ik}$.

$$S_m = \frac{1}{c}\int \Lambda\sqrt{-g}\, d\,\Omega\ ,$$

waarbij nu Λ een functie van zowel de gegeneraliseerde coördinaten q_l is als van de metrische tensor g_{mn}. De dimensie van S_m is $[Kg\frac{m^2}{s}]$.

Variatie naar q_l zal een bijdrage *0* opleveren zolang maar aan de bewegings-vergelijkingen wordt voldaan. Hier zijn wij dus geïnteresseerd in de variatie naar g_{mn}:

$$\begin{aligned}\delta S_m &= \frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik} + \frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\delta(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l})\right)d\,\Omega \\ &= \frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right)\delta g^{ik}\, d\,\Omega \\ &\equiv \frac{1}{c}\int T_{ik}\sqrt{-g}\ \delta g^{ik}\, d\,\Omega\end{aligned} \tag{12.1}$$

waarin de energie-impuls tensor volgt uit de relatie:

$$T_{ik}\sqrt{-g} = \left(\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right) \tag{12.2}$$

Hieruit blijkt de symmetrie van T_{ik} onmiddellijk. Ook is aan te tonen dat de divergentie van T_{ik} nul is:

$$T^i_{k\,;i} = 0\ ,$$

dus de bekende behoudswetten voor energie en impuls zijn ook hier geldig.

13. Actiefunctie van materie en zwaartekrachtsveld samen

Voor een extremum van de variatie van de totale actie *S* moet de combinatie $\delta(S_g + K\,S_m) = 0$ zijn, waarin de constante *K* moet zorgen voor de juiste onderlinge verhouding van δS_g en δS_m en de aanpassing van hun dimensies. In beide actieintegralen (11.1 en 12.1) wordt gevariëerd naar dezelfde willekeurige δg_{ik}, zodat moet gelden:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}R\,g_{ik} + C\,g_{ik} + K\,T_{ik} = 0 \tag{13.1}$$

Op de constante *C* in het linkerlid komen wij later nog terug. Vooralsnog stellen wij deze *0* en bepalen eerst de constante *K*. Hiertoe schrijven wij (13.1) uit voor de indices $i = k = 0$:

$$R_{00} - \frac{1}{2}R\,g_{00} + C\,g_{00} + K\,T_{00} = 0$$

en berekenen wij de verschillende termen bij lage snelheden en in een zwak zwaartekrachts-veld.

1. In (4.3) vonden wij al $g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$, waarin de klassieke potentiaal Φ volgt uit[7]

$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho = 4\pi G\frac{\epsilon}{c^2}$. Hiermee is $\nabla^2 g_{00} = 8\pi G\frac{\epsilon}{c^4}$ (13.2)

7 Zie annex A

2. Met (10.10) is $R_{00} = \frac{\partial \Gamma^l_{00}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{0l}}{\partial x^0} + \Gamma^l_{00}\,\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{01}\,\Gamma^l_{0m}$. In een zwak veld zijn de Γ termen klein, dus termen kwadratisch in Γ kunnen worden verwaarloosd. Verder zijn afgeleiden naar x^0 veel kleiner dan die naar de ruimtelijke afgeleiden. Hiermee en met $\alpha=1,2,3$ wordt dan $R_{00} \approx \frac{\partial \Gamma^l_{00}}{\partial x^l} \approx \frac{\partial \Gamma^\alpha_{00}}{\partial x^\alpha}$. Met $g^{mn} \approx \eta^{mn}$ en dezelfde benaderingen voor (3.2) volgt $\Gamma^\alpha_{00} \approx \frac{1}{2}\eta^{n\alpha}\left(\frac{\partial g_{0n}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0n}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^n}\right) \approx \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}$.

   Hiermee is dus $R_{00} \approx \frac{\partial \Gamma^l_{00}}{\partial x^l} \approx \frac{\partial \Gamma^\alpha_{00}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}$ of, met (13.2):

$$R_{00} \approx \frac{4\pi G\epsilon}{c^4} \tag{13.3}$$

3. Voor de berekening van $R = R^m{}_m = g^{mn} R_{mn} \approx R_{00} - R_{\alpha\alpha}$ gebruiken wij de ruimtelijke componenten van (13.1). Voor niet-relativistische materie is $T_{\alpha\beta}$ klein, zodat voor het krommingsdeel van de vergelijking bij benadering geldt dat $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R\,g_{\alpha\beta} \approx 0$, zodat

$$R_{\alpha\alpha} \approx \frac{1}{2}R\,g_{\alpha\alpha} = -\frac{3}{2}R \text{ en dus } \frac{1}{2}R \approx -R_{00} \tag{13.3}$$

4. Hiermee schrijven wij $R_{00} - \frac{1}{2}R\,g_{00} + K\,T_{00} = 2\,R_{00} + K\,T_{00} = 0$, zodat de constante gelijk is aan: $K = -2\,\frac{R_{00}}{T_{00}} = -\frac{8\pi G}{c^4}$

Met dit resultaat vinden wij de ***Einstein vergelijkingen***:

$$\boxed{R_{ik} - \frac{1}{2}R\,g_{ik} + C\,g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}} \tag{13.4}$$

De term $C\,g_{ik}$ is door Einstein pas later in de vergelijkingen toegevoegd om hiermee een statisch heelal (zoals men toen veronderstelde) te kunnen verklaren. C wordt daarom de ***kosmologische constante*** genoemd. De term $\frac{c^4 C}{8\pi G}$ vertegenwoordigt een energiedichtheid en C, R en R_{ik} hebben de dimensie [m^{-2}].

De Einstein vergelijkingen zijn niet-lineaire, tweede orde differentiaalvergelijkingen. Dit houdt in het superpositie principe, zeker bij sterke velden, niet geldig is. In de praktijk zijn echter de velden zwak, zodat de vergelijkingen in eerste benadering gelineariseerd kunnen worden en in dit geval superposities van velden mogelijk zijn.

In de lege ruimte is $T_{ik}=0$, zodat het linkerlid reduceert tot de vergelijking $R_{ik}=0$. Dit houdt niet in dat de componenten van de Riemanntensor zelf *0* moeten zijn en dus kunnen er oplossingen bestaan voor een dynamische geometrie in een lege ruimte-tijd (gravitatiegolven).

14. Schwarzschild Metriek[8]

Deze metriek is de oplossing van de Einstein vergelijkingen in vacuum bij een centraal symmetrisch zwaartekrachtsveld: een veld waarin de massaverdeling isotroop blijft ten opzichte van het centrale punt én de beweging ervan uitsluitend in radiële richting plaatsvindt. De meest algemene vorm van het interval is hierbij:

$$d s^2 = a(r,t) c^2 (dt)^2 + b(r,t) dr\, dt + f(r,t)(dr)^2 + h(r,t)\left((d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\phi)^2\right)$$

waar a, b, e, f bepaalde functies van *r* en *t* zijn. Vanwege de willekeurigheid van de keuze van het referentiesysteem in de ART kan door een geschikte transformatie $r = f_1(\tilde{r}, \tilde{t})$ en $t = f_2(\tilde{r}, \tilde{t})$ de coëfficient *b* nul en $h(r,t) = -r^2$ gemaakt worden zonder de centrale symmetrie te vestoren[9]. Stellen wij verder $a = e^{\alpha}$ en $f = -e^{\beta}$, dan kan worden geschreven:

$$d s^2 = e^{\alpha} c^2 (dt)^2 - e^{\beta} (dr)^2 - r^2\left((d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\phi)^2\right) \qquad (14.1).$$

1. Hierin zijn $g_{00} = e^{\alpha}$, $g_{11} = -e^{\beta}$, $g_{22} = -r^2$ en $g_{33} = -r^2 \sin^2\theta$ dus de enige componenten van de metrische tensor die ongelijk *0* zijn. En dus zijn ook $g^{00} = e^{-\alpha}$, $g^{11} = -e^{-\beta}$, $g_{22} = -r^{-2}$ en $g_{33} = -r^{-2}\sin^{-2}\theta$.
   Het is nu zaak om door uitwerking van de Einstein vergelijkingen de oplossingen voor α en β te vinden.
2. Invullen in (3.2) levert de relevante affiene connecties: Γ^0_{00}, Γ^0_{01}, Γ^0_{10}, Γ^0_{11}, Γ^1_{00}, Γ^1_{01}, Γ^1_{10}, Γ^1_{11}, Γ^1_{22}, Γ^1_{33}, Γ^2_{12}, Γ^2_{21}, Γ^2_{33}, Γ^3_{23}, Γ^3_{32}.
   Bijvoorbeeld: $\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\right) = \frac{1}{2} e^{-\alpha} e^{\alpha} \frac{\dot{\alpha}}{c}$
3. Hiermee kunnen de termen R_{ik} volgens (10.10) en *R* worden berekend
4. Ten slotte worden de Einstein vergelijkingen uitgeschreven. Hiervan bijken alleen die voor de componenten $T_{00}, T_{01} = T_{10}, T_{11}, T_{22}$ en T_{33} over te blijven, nl[10]:
   - $\frac{8\pi G}{c^4} T_{00} = e^{\alpha}\left(-e^{-\beta}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\beta'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}\right)$
   - $\frac{8\pi G}{c^4} T_{01} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{10} = \frac{\dot{\beta}}{c r}$
   - $\frac{8\pi G}{c^4} T_{11} = \frac{\alpha'}{r} + \frac{1 - e^{\beta}}{r^2}$
   - $\frac{8\pi G}{c^4} T_{22} = r^2\left(\frac{1}{2} e^{-\beta}\left(\alpha'' + \frac{\alpha'(\alpha' - \beta')}{2} + \frac{\alpha' - \beta'}{r}\right) - \frac{1}{2} e^{-\alpha}\left(\frac{\ddot{\alpha}}{c^2} + \frac{\dot{\beta}(\dot{\beta} - \dot{\alpha})}{2c^2}\right)\right)$
   - $T_{33} = \sin^2\theta \;\; T_{22}$
5. Deze vergelijkingen kunnen exact worden opgelost in de lege ruimte buiten de massa die het zwaartekrachtsveld opwekt. In dit geval is $T_{mn} = 0$, en moeten α en β volgen uit:
   - $\dot{\beta} = 0$ (14.2)

8 Wij volgen hier de afleiding van Landau & Lifschitz (para 97)

9 Dit laat nog steeds toe dat ook *t* wordt getransformeerd volgens $t = f(\tilde{t})$, waarbij *f* de coördinaat *r* niet bevat. Hiervan maken wij gebruik bij (14.5)

10 Hier staat α' voor $\frac{\partial \alpha}{\partial r}$ en $\dot{\alpha}$ voor $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, idem voor β

- $$\frac{\alpha'}{r} + \frac{1 - e^{\beta}}{r^2} = 0 \tag{14.3}$$
- $$\frac{\beta'}{r} - \frac{1 - e^{\beta}}{r^2} = 0 \tag{14.4}$$

De vergelijkingen voor T_{22} en T_{33} zijn niet van belang omdat zij uit deze drie volgen.
Er blijkt dus dat β tijdonafhankelijk is en dat $(\alpha + \beta)$ alleen een mogelijke tijdsafhankelijkheid heeft: $(\alpha + \beta) = f(t)$. Een goed gekozen transformatie $t = f(t')$ is echter nog mogelijk zonder de algemeenheid van het bovenstaande aan te tasten, waarmee $(\alpha + \beta) = 0$ kan worden gemaakt. Integratie van (14.4) geeft dan:

$$e^{-\beta} = e^{\alpha} = 1 + \frac{const}{r} \tag{14.5}$$

In (4.3) vonden wij voor zwakke velden al dat $g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$, waarmee dus de constante bepaald is. Met de ***Schwarzschild straal*** R_s :

$$\boxed{R_s \equiv \frac{2GM}{c^2}} \tag{14.6}$$

vinden wij dan voor de ***Schwarzschild metriek (1916)***:

$$\boxed{d s^2 = (1 - \frac{R_s}{r})(c\,dt)^2 - \frac{(dr)^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - r^2\left[(d\,\theta)^2 + \sin^2\theta(d\,\phi)^2\right]} \tag{14.7}$$

Het is van belang op te merken, dat de metrische tensor in het vacuüm buiten de massa's en bij een centraal symmetrisch veld (isotrope massaverdeling om een centraal punt en alleen radiële beweging van de massadeeltjes) *tijdsonafhankelijk* is en alleen afhangt van de totale massa[11]. Het algemene inzicht dat iedere metriek die isotroop is om een punt in de ruimtetijd een stationair zwaartekrachtsveld vertegenwoordigt, is geformuleerd in het ***theorema van Birkhoff (1923)***. In de Newtonse mechanika heeft isotropie niets met de tijd te maken, hier dus wel.

Zoals wij al eerder vonden is de eigentijd altijd korter dan de tijd zoals deze elders wordt waargenomen: $d\tau \leq dt$. Alleen op afstand ∞ zijn beide gelijk.

Het lengte-element wordt gegeven door de uitdrukking

$$d\,l^2 = \frac{(dr)^2}{1 - \frac{R_s}{r}} + r^2\left((d\,\theta)^2 + \sin^2\theta(d\,\phi)^2\right) \tag{14.8}$$

waaruit volgt dat de coördinaat r kan worden geïnterpreteerd als de “straal” van een cirkel die een omtrek $2\pi r$ heeft. De radiële afstand tussen de twee punten op r_1 en r_2 is echter $\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}}$ en dus groter dan $(r_2 - r_1)$.

.

11 Hier hoeft dus niet te worden aangenomen dat de massa's in rust zijn, zolang hun beweging maar centraal symmetrisch is.

Annex A

Klassieke relatie tussen gravitatiepotentiaal en massadichtheid

Omdat de relaties (A.1) en (A.2) hieronder meermalen gebruikt worden in de berekeningen bij de ART, worden de afleidingen ervan volgens de niet-relativistische mechanica hier gegeven.
De potentiaal $\Phi(r)$ heeft een waarde *0* in ∞ en wordt steeds negatiever naarmate de bron ervan wordt genaderd: $\Phi = -\frac{GM}{r}$

De versnelling die een massa *m* door dit potentiaalveld ondervindt is

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -m\nabla\Phi = -\frac{GMm}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

en hiermee is $\nabla\Phi = \frac{GM}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$

Wij gebruiken nu het theorema van Gauss om een relatie te leggen tussen de potentiaal en de massadichtheid:

$$\int \nabla.\nabla\Phi\, dV = \oiint \nabla\Phi.d\boldsymbol{S}$$

bij een bolvorminge massaverdeling voor het volume tussen de bolschillen op *r+dr* en op *r* van het middelpunt. De (bolvormige) massa buiten deze schillen heeft geen bijdrage in de potentiaal erbinnen. Dus:

$$(\nabla^2\Phi)\, 4\pi r^2 dr = 4\pi G\left((r+dr)^2\frac{M_{r+dr}}{(r+dr)^2} - r^2\frac{M_r}{r^2}\right) = 4\pi G\left(M_{r+dr} - M_r\right)$$

$$= 4\pi G\rho\, \frac{4\pi}{3}\left((r+dr)^3 - r^3\right) = 4\pi G\,\rho\;\; 4\pi r^2 dr$$

zodat

$$\boxed{\nabla^2\Phi = 4\pi G\,\rho} \qquad \text{(A.1)}$$

In de SRT kan dan worden geschreven:

$$\boxed{\nabla^2\Phi = 4\pi G\,\rho = 4\pi G\,\frac{\epsilon}{c^2}} \qquad \text{(A.2)}$$