Samenvatting Speciale Relativiteits Theorie

DOOR

M^2HV

Metius
Werkgroep Theoretische Sterrenkunde

April 2008

Alkmaar

Referenties:

1) L.D. Landau and E.M. Lifshitz: Course of Theoretical Physics Vol 2, The Classical Theory of Fields (Pergamon Press, 1971)

2) J.W. van Holten: Gravitatie – van Zwaartekracht tot Kosmologie (Collegesyllabus VU, 2000)

3) W.A. van Leeuwen: Algemene Relativiteitstheorie I (Collegesyllabus UvA, 2001)

Conventies:

3D vectoren zijn vet en cursief gedrukt: $\boldsymbol{v}$

Indices van grootheden in de 3D ruimte staan voor 1, 2 of 3 en worden aangeduid door cursieve griekse letters: $\alpha, \beta, \gamma, \ \ldots$

Indices van grootheden in de 4-ruimte staan voor 0, 1, 2 of 3 en worden aangeduid door cursieve latijnse letters: $a, b, c, \ldots$

4-Vectoren worden geschreven als $x^i \quad (i=0,1,2,3)$ (contravariant) of $x_i \quad (i=0,1,2,3)$ (covariant)

Dubbel voorkomende indices in formules impliceren sommatie over deze indices: $x^i x_i \equiv \sum_{i=0}^{3} x^i x_i$

Het symbool ***nabla*** ∇ staat voor de 3D vector operator $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$

De ***gradiënt*** van een 3D scalarveld ϕ is hiermee $\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)$

De ***divergentie*** $\nabla.\boldsymbol{v}$ van de 3D vector $\boldsymbol{v}$ is $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right).\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)$

De ***metrische tensor in de Minkowski ruimte*** wordt voorgesteld door $\eta^{ik} = \eta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

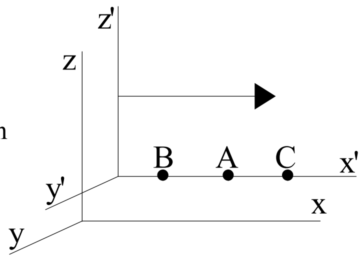
De ***Kronecker delta tensor*** δ_k^l is 1 voor $k=l$ en anders 0

Speciale Relativiteits Theorie

Voortplantingssnelheid van interacties [1]

Voor de beschrijving van processen die in de natuur plaats vinden heeft men een referentiesysteem nodig. Dat is een systeem van coördinaten die de positie van een deeltje weergeven in de ruimte en de bijbehorende tijd, met klokken die aan dit systeem gekoppeld zijn.
Een belangrijke klasse van referentiesystemen zijn de ***inertiaalstelsels:*** stelsels waarin het traagheidsbeginsel geldt, dat een lichaam vrij van uitwendige krachten zich met een constante snelheid (grootte en richting) voortbeweegt.
Experimenten hebben aangetoond dat de natuurwetten onveranderd blijven in alle inertiale stelsels: dit is het ***relativiteitsprincipe***.
In de klassieke mechanica wordt aangenomen dat de interacties tussen lichamen onmiddellijk plaatsvinden. Experimenten geven echter aan dat zulks niet in de natuur bestaat. Het is pas na een zeker tijdsinterval dat processen veroorzaakt door de initiële verandering plaats vinden in het ontvangende lichaam. De snelheid van voortplanting van de interactie is de afstand tussen de beschouwde lichamen gedeeld door dit tijdsinterval. Strikt gesproken is deze snelheid de maximum snelheid van de voortplanting van interacties. Een grotere snelheid dan deze leidt tot een innerlijke tegenspraak. Vanwege het relativiteitsprincipe is deze snelheid een universele constante; deze is gelijk aan de snelheid van het licht, c, in vacuüm, afgerond 300.000 km/sec. De ***combinatie van het relativiteitsprincipe en de eindige lichtsnelheid*** wordt het ***<u>relativiteitsprincipe van Einstein</u>*** genoemd (1905), dit in tegenstelling tot het ***relativiteitsprincipe van Galileï***, dat gebaseerd is op onmiddellijke interacties. Daarom maken wij onderscheid tussen de klassieke en de relativistische mechanica.

Tijd en Ruimte



Zoals eerder is besproken blijkt dat tijd en ruimte geen absolute begrippen zijn. Gelijktijdigheid is alleen maar een zinvol begrip als het referentiestelsel er bij genoemd wordt, wat duidelijk wordt uit de figuur rechts.
Hier zijn twee inertiaalstelsels K en K' met de x en x'-as gelijkgericht, waarbij K' t.o.v. K met een snelheid $\boldsymbol{v}$ beweegt langs de x-as . Het signaal van A gaat naar B en C, die in K' op gelijke afstanden liggen van A en waarvoor het signaal dus gelijktijdig arriveert bij B en C. ***Voor de waarnemer in K is daar door de constante voortplantingssnelheid van interacties echter geen sprake van***. Het is dus nodig om ook de tijd afhankelijk te maken van de keuze van het referentiestelsel.

Zo'n inertiaalstelsel moet dus worden gedefiniëerd op 4 assen als $\{x^m\}_{m=0}^{3} = (ct, x, y, z)$. Een ***<u>event</u>*** of ***<u>gebeurtenis</u>*** in dit stelsel wordt zo vastgelegd door de ***4-radius vector*** $x^m \equiv (x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$, waarin $x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$.
Gebeurtenissen in deze ruimte-tijd worden ook wereldpunten genoemd en de beweging van een puntdeeltje wordt beschreven door de ***wereldlijn***, de baan van het deeltje aflegt in de ruimte-tijd.
<u>Vier-vectoren</u> zoals hier geïntroduceerd zijn een nieuw en belangrijk begrip voor de SRT en ART. Wij zullen te maken krijgen met verschillende vier-vectoren: naast de genoemde 4-radius vector hebben wij bijv. ook vier-vectoren voor de snelheid en de impuls.

Transformaties tussen inertiaalsystemen

In een inertiaalstelsel K met coördinaten $x^i = (ct, x, y, z) = (ct, \boldsymbol{r})$ beschrijft een vrij deeltje een baan van de vorm $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \boldsymbol{v}t$, waarbij de snelheid $\boldsymbol{v}$ constant is in grootte en richting. Wordt deze beweging gezien vanuit een ander inertiaalstelsel K' in de coördinaten $x'^i = (ct', x', y', z') = (ct', \boldsymbol{r}')$, dan zal ook daar de snelheid $\boldsymbol{v}'$ constant in grootte en richting moeten zijn. Laat de relatie tussen x^i en x'^i worden gegeven door $x'^i = f^i(x)$, dan geldt voor de transformatie:

$$dx''^i = \sum_{j=0}^{3} \left(dx^j \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right) = \text{, zodat} \qquad \frac{\boldsymbol{v}'}{c} = \frac{d\boldsymbol{r}'}{c\,dt'} = \frac{(d\boldsymbol{r}.\nabla)\boldsymbol{f} + dt(\partial \boldsymbol{f} / \partial t)}{(d\boldsymbol{r}.\nabla) f^0 + dt(\partial f^0 / \partial t)}$$

Omdat $\boldsymbol{v}'$ constant moet zijn, betekent dit dat alle afgeleiden $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ constant moeten zijn en dat dus de $f^i(x)$ lineaire

1 Deze hand-out is het beste te lezen in samenhang met “Inleiding klassieke mechanica” t.b.v. de Speciale en Algemene Relativiteitstheorie van 6 feb 2008 en de presentatie over de SRT (Speciale Relativiteits Theorie) van 2 maart 2008.

functies van de oorspronkelijke coördinaten moeten zijn. De inertiaaltransformatie van x naar x' is dus lineair en heeft constante coëfficienten L^i_j en verschuivingen a^i :

$$x'^i = \sum_{j=0}^{3} L^i{}_j\, x^j + a^i \qquad (1)$$

Metrische tensor

Met de ***bovenstaande*** indices wordt de 4-radius vector (x^0, x^1, x^2, x^3) zoals hierboven op de zgn. ***contravariante*** manier beschreven. Hiernaast is de ***covariante*** beschrijving van dezelfde grootheid gedefiniëerd als x_0, x_1, x_2, x_3 , waarbij ***in de SRT*** [2] de relatie tussen de contravariante en covariante componenten is:

$$x_0 = x^0\ ,\ x_1 = -x^1\ ,\ x_2 = -x^2\ ,\ x_3 = -x^3\ .$$

Wij definiëren hier nu de covariante ***metrische tensor*** η_{ik} , die er in het speciale geval van de ***Minkowski ruimte*** uitziet als:

$$\boxed{\eta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}\ . \qquad (2)$$

Deze metrische tensor is symmetrisch. Zijn inverse η^{ik} wordt gedefiniëerd door de relatie:

$$\eta^{mj}\eta_{lj} = \delta^m_n\ , \qquad (3)$$

zodat blijkt, dat de covariante en zijn inverse, in dit geval de contravariante metrische tensor, aan elkaar gelijk zijn:

$$\eta^{ik} = \eta_{ik}$$

Formeel kan nu het verband tussen de bovengenoemde contravariante en de covariante 4-vector worden weergegeven door de volgende tensorrelatie, waarbij gesommeerd wordt over de dubbel voorkomende indices [3] :

$$x_i = \eta_{ik} x^k \quad \text{en} \quad x^i = \eta^{ik} x_k\ , \qquad (4)$$

In (4) is te zien hoe η_{ik} of η^{ik} een bovenstaande index van x naar beneden haalt, resp. een onderstaande naar boven brengt. Van deze bewerking zullen wij ook bij tensoren veel gebruik gaan maken.

De Minkowski metrische tensor heeft alleen termen ongelijk aan 0 op de hoofddiagonaal, maar in een algemenere vorm ervan, g^{ik} of g_{ik} , zal dit niet het geval zijn. De metrische tensor g zullen wij in de ART nog vaak gebruiken.

Intervallen

Wij gaan nu de onveranderlijkheid van c wiskundig uitdrukken. In het stelsel K hebben wij een eerste gebeurtenis $(x^0, x^1, x^2, x^3)_1$ waarbij het licht wordt uitgezonden en een tweede gebeurtenis $(x^0, x^1, x^2, x^3)_2$ waarbij het licht wordt ontvangen. De afstand Δr is dan gelijk aan de afstand die het licht aflegt: $c\,\Delta t$, dus $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta r)^2 = 0$. In het stelsel K' geldt dezelfde redenering en omdat c constant is kunnen wij schrijven $c^2(\Delta t')^2 - (\Delta r')^2 = 0$.
Het (***Minkowski)*** ***interval*** tussen twee events is nu gedefiniëerd als:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 = \Delta x_i \Delta x^i\ ,$$

of voor een oneindig klein interval:

$$ds^2 = (c\,dt)^2 - (dr)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

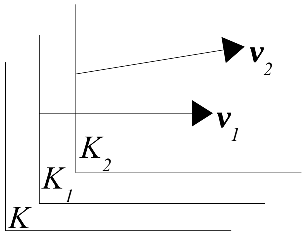
Gebruik makend van de covariante en contravariante notatie, de metrische tensor en Einstein's sommatieregel is dit interval te schrijven als:

$$\boxed{ds^2 = dx_i dx^i = \eta_{ik} dx^k dx^i = \eta^{ik} dx_i dx_k} \qquad (5)$$

Dit interval is dus ***voor een lichtstraal*** gelijk aan 0 en onafhankelijk van het gekozen inertiaalstelsel:

2 Later zullen wij bij de ART een algemenere beschrijving geven. Op de begrippen covariant en contravariant komen wij verderop nog terug
3 Einstein introduceerde deze schrijfwijze waarbij het dubbel voorkomen van een index een sommatie over deze index impliceert

$(ds)^2 = (ds')^2 = 0$. Maar wat is nu de relatie tussen $(ds)^2$ in het ene en $(ds')^2$ in het andere inertiaalstelsel? [4] Deze relatie is van belang voor de dynamica van deeltjes, waarvoor ds niet vanzelfsprekend 0 is.
Omdat beide grootheden van dezelfde orde zijn, moet er een evenredigheid zijn tussen die twee, dus stellen wij: $(ds)^2 = a(ds')^2$. De evenredigheidsfactor a kan niet afhankelijk kan zijn van de plaats, omdat de ruimte homogeen is, noch van de tijd, omdat de tijd homogeen is en ook niet van de richting van de snelheid van K t.o.v. K', omdat de ruimte isotroop is. Om een eventuele afhankelijkheid van de grootte van de snelheid van K tov. K' te onderzoeken beschouwen wij drie stelsels K, K_1 en K_2 (zie figuur), waarbij K_1 en K_2 zich met $\boldsymbol{v_1}$, resp. $\boldsymbol{v_2}$ tov. K verplaatsen. Wij hebben dan als relatie tussen K en K_1 : $(ds)^2 = a(v_1)\,(ds_1)^2$ en tussen K en K_2 : $(ds)^2 = a(v_2)\,(ds_2)^2$.
Als nu $\boldsymbol{v_{12}}$ de snelheid is van K_1 t.o.v. K_2 , dan geldt daarvoor op zijn beurt $(ds_1)^2 = a(v_{12})\,(ds_2)^2$. Zo vinden wij:



$$\frac{a(v_2)}{a(v_1)} = a(v_{12}) \ . \qquad (6)$$

Maar v_{12} hangt af van de hoek tussen v_1 en v_2 , die wij echter niet zien in de linkerkant van de uitdrukking. Dus is deze formule alleen maar correct als a een constante is en gelijk aan 1. Dus is $(ds)^2 = (ds')^2$ en hieruit volgt ook $ds = ds'$ en $s = s'$

Ruimteachtig, Lichtachtig (lichtkegel) en Tijdachtig

Alle gebeurtenissen P in de ruimte-tijd die met een gegeven gebeurtenis P_0 door lichtstralen verbonden zijn, vormen samen de ***lichtkegel*** van het punt P_0 ; de lichtkegel bestaat dus uit de verzameling punten die voldoet aan $(\Delta s)^2 = 0$.
Aangezien de lichtsnelheid dezelfde is in alle inertiaalstelsels, moet de vergelijking voor de lichtkegel in al die inertiaalstelsels gelden. Inertiaalstelsels zijn echter met elkaar verbonden door lineaire coördinatentransformaties volgens (1). Daarom houdt het postulaat van de universele lichtsnelheid in, dat de transformaties tussen inertiaalstelsels beperkt moeten worden tot die lineaire transformaties die de lichtkegel invariant laten.

Wij kunnen drie soorten intervallen onderscheiden:

- ***Tijdachtige intervallen met*** $(\Delta s)^2 > 0$. Voor zulke intervallen kunnen we altijd een coördinatenstelsel vinden waarin $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2$, en dus $\Delta r = 0$. Dit is het rustsysteem, waarin de gebeurtenissen P en P_0 zich afspelen in hetzelfde punt van de ruimte. In dit geval komt het interval dus overeen met c maal de tijd in het rustsysteem. Dit invariante tijdinterval noemen we de ***eigentijd*** .
- ***Lichtachtige intervallen*** met $(\Delta s)^2 = 0$. Deze verbinden gebeurtenissen die op elkaars voorwaartse of achterwaartse lichtkegel liggen, met $(\Delta r)^2 = c^2(\Delta t)^2$.
- ***Ruimteachtige intervallen*** met $(\Delta s)^2 < 0$; voor zulke intervallen is het altijd mogelijk een coördinatenstelsel te vinden waarin $(\Delta s)^2 = (\Delta r)^2$, en dus $\Delta t = 0$. In dit coördinatenstelsel zijn de gebeurtenissen P en P_0 gelijktijdig.

De invariantie van Δs onder Lorentztransformaties betekent dat deze deze eigenschappen een ***absoluut*** karakter hebben.

Eigentijd en tijddilatatie

De ***eigen tijd*** is de tijd die gemeten wordt door een klok die in rust is in het stelsel K'. De tijd van de waarneming van dezelfde gebeurtenis op de klok in het stelsel K, ten opzichte waarvan K' beweegt, kan nu als volgt direct bepaald worden. Omdat in K' de klok stil staat is daar $dr' = 0$. Dan geldt dat $ds^2 = c^2\,dt'^2 = c^2\,dt^2 - dr^2$ en dus is de eigen tijd $d\tau$:

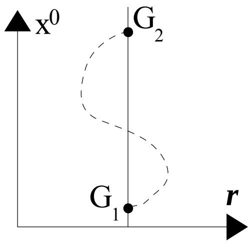
$$\boxed{d\tau = dt' = dt\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} \qquad (7)$$ [5]

In (7) wordt dus de eigen tijd uitgedrukt in de tijd van het systeem K van waaruit de beweging wordt waargenomen: de eigen tijd van een bewegend lichaam is altijd gelijk of korter dan het corresponderende interval in het rustsysteem van de waarnemer, of andersom zal $dt = d\tau / \sqrt{(1 - v^2/c^2)}$ altijd groter of gelijk zijn aan $d\tau$. **Bewegende klokken lopen dus langzamer dan die in rust, er treedt tijddilatatie op.**
Het ***tijdsinterval*** gemeten door de klok in rust volgt uit $ds = c\,d\tau$ en is

4 Zie voor een meer formele benadering de afleiding voor de betrekking (9) en Appendix A
5 Als symbool voor de eigentijd wordt τ gebruikt, om deze te onderscheiden van de tijd in het ruststelsel van de waarnemer

$$\tau = \frac{1}{c}\int ds = \frac{1}{c}\int \sqrt{(1-v^2/c^2)}dt \ . \tag{8}$$

Als de klok in rust is, is τ dus maximaal. Dit geeft voor de opeenvolgende gebeurtenissen G_1 en G_2 een rechte wereldlijn in de tijdrichting van het K stelsel van de waarnemer in rust (zie figuur). Als in dit stelsel een bewegende klok na enige tijd weer terugkomt naar zijn beginpunt in het ruststelsel, moet dus de eigen tijd afgelezen van de bewogen klok (de wereldlijn is gestippeld aangegeven) korter zijn dan die, afgelezen op de vaste klok in het ruststelsel.



Dit betekent dat de integraal $\frac{1}{c}\int ds$ een maximum vertoont voor de ruststituatie [6].

Lorentz transformaties

Een eerste vereiste voor transformaties tussen inertiaalsystemen is dat zij vasthouden aan het traagheidsbeginsel, dwz. dat een vrij deeltje ook na transformatie een constante snelheid heeft. Wij zagen dat de transformaties hiertoe aan (1) moeten voldoen, dwz. dat zij lineair zijn. Verder zagen wij dat het constant zijn van de lichtsnelheid eist dat de lichtkegel invariant is. Dit legt een beperking op aan de transformatiecoëfficienten $L^i{}_j$. De verschuivingen a^i zijn hier niet van belang omdat zij wegvallen in de intervallen. Wij eisen dat in K en K' de intervallen voor licht gelijk en beide 0 zijn: $(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 = 0$, zodat

$$(\Delta s)^2 = \eta_{kl}\Delta x^k \Delta x^l = (\Delta s')^2 = \eta_{mn}\Delta x'^m \Delta x'^n = \eta_{mn} L^m{}_k \, L^n{}_l \, \Delta x^k \Delta x^l = 0 \ .$$

Op grond hiervan moet dan ook voor intervallen ongelijk 0 gelden [7] dat $\eta_{mn} L^m{}_k \, L^n{}_l = a^2 \eta_{kl}$, met een willekeurige constante a^2 . Voor het speciale geval dat $a^2 = 1$ zijn dit de Lorentztransformaties [8], die dus ieder Minkowski interval invariant laten:

$$\eta_{mn} L^m{}_k \, L^n{}_l = \eta_{kl} \tag{9}$$

Wij beperken ons verder tot dit geval.

De Lorentztransformaties geven de relatie tussen de coördinaten in een ruststelsel en hun getransformeerden in een ander inertiaalstelsel en bijgevolg zijn $dx'^i = L^i{}_j \, dx^j$ en $dx^k = (L^{-1})^k{}_l \, dx'^l$. In deze laatste uitdrukking wordt de inverse Lorentztransformatie L^{-1} gebruikt (transformatie van een bewegend naar een rustend stelsel). Om deze uit te werken en anders te schrijven vermenigvuldigen wij (9) met η^{lr} :

$$(\eta_{mn} \, L^n{}_l \eta^{lr}) L^m{}_k = \eta_{kl}\eta^{lr} = \delta^r_k \ ,$$

waarmee wij de inverse Lorentztransformatie vinden als:

$$\boxed{(L^{-1})^r{}_m = \eta_{mn} L^n{}_l \eta^{lr} = L_m{}^r} \ [9] \tag{10}$$

Met deze notatie schrijven wij nu:

$$\boxed{dx'^i = L^i{}_j \, dx^j} \text{ en } \boxed{dx^k = L_l{}^k dx'^l} \tag{11}$$

voor de transformatie van de differentialen.

Wij zien hier dat een contravariante 4-vector met de Lorentztransformatie transformeert, terwijl een covariante vector dit met de inverse Lorentztransformatie doet.

Wij willen nu de coëfficienten te bepalen van een transformatie tussen het rustende inertiaalstelsel K en een ander inertiaalstelsel K' dat in de positieve x^1 -richting van K beweegt. Hierbij zijn translaties en gewone rotaties in de $x^1 x^2$, $x^2 x^3$ en $x^3 x^1$ -vlakken niet van belang, want zij laten het interval $(\Delta s)^2$ zonder meer invariant, immers $(\Delta \boldsymbol{r})^2$ verandert niet. Dus blijven over de rotaties in het $x^0 x^1$, $x^0 x^2$, en $x^0 x^3$ -vlak. Wij bekijken nu de rotatie in het $x^0 x^1$ -vlak, waarbij dus de rotaties in het $x^0 x^2$ en $x^0 x^3$ -vlak onveranderd blijven en x^1 in een bepaalde relatie tot x^0 verandert. Dit laatste zal dus een afhankelijkheid van de snelheid in x^1 -richting gaan opleveren. De relevante termen

6 Deze eigenschap hangt samen met de Minkowski metriek van de 4-ruimte; in de Euclidische ruimte zou de integraal minimaal zijn.

7 Wij zagen dit al in de conclusie (6)

8 Wij beperken ons tot de *homogene* Lorentztransformaties waarbij de verschuivingen a^i in (1) 0 zijn. Ook schaaltransformaties (met $a^2 \neq 1$) laten wij buiten beschouwing omdat zij niet verenigbaar zijn met de dynamica van deeltjes, waarbij bijv. het totale kwadraat van de 4-impuls $p_i p^i$ behouden dient te blijven (zie verderop).

9 Zoals wij zagen in (4) brengt vermenigvuldiging van een 4-vector met de metrische tensor bovenindices naar beneden of omgekeerd. Dit geldt ook voor tensoren en is hier in de laatste stap toegepast.

van de transformatie (1) zijn dan:

$$x'^0 = L^0{}_0 x^0 + L^0{}_1 x^1 \qquad x'^2 = x^2$$
$$x'^1 = L^1{}_0 x^0 + L^1{}_1 x^1 \quad \text{, en} \quad x'^3 = x^3$$

De eis dat $ds^2 = ds'^2$ levert de ***Lorentztransformaties*** [10]:

$$\boxed{\begin{aligned} x'^0 &= \frac{x^0 - v x^1 / c}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \\ x'^1 &= \frac{x^1 - v x^0 / c}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned}} \text{ of } \boxed{L^i{}_j = \frac{1}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c & 0 & 0 \\ -v/c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \tag{12}$$

Het is duidelijk dat voor $v \rightarrow -v$ de inverse transformatie, dus vanuit het bewegende naar het ruststelsel, optreedt.

Lengte contractie

Met deze Lorentztransformatie bepalen wij nu de lengte $\left((x'^1)_2 - (x'^1)_1\right)$ van een staaf in rust in het bewegende stelsel K', zoals die wordt waargenomen als $\left((x^1)_2 - (x^1)_1\right)$ in het stilstaande stelsel K. Voor de waarnemer in K beweegt het stelsel K' en de staaf met een snelheid v in de positieve x^1 -richting. Wij moeten hier dus gebruik maken van de inverse Lorentztransformatie.

Dan is: $(x^1)_1 = \dfrac{(x'^1)_1 + v(x'^0)_1}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}$, $(x^1)_2 = \dfrac{(x'^1)_2 + v(x'^0)_2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}$ en dus geldt: $\boxed{\Delta x^1 = \dfrac{\Delta x'^1}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}}$ (13)

Er treedt dus ***lengte contractie*** op: ***bewegende staven worden korter in de richting van de beweging*** [11].

Transformatie van snelheden

De transformatie van een snelheid **v** in het ruststelsel K naar een bewegend stelsel K' laat zich gemakkelijk uitrekenen door in de bovenstaande Lorentz formules de differentialen van de coördinaten en de tijd te gebruiken en dx^1, dx^2 en dx^3 door dx^0 te delen. Dit levert, voor een beweging van K' in de positieve x^1 -richting:

$$v'_1 = \frac{v_1 - v}{1 - v_1 v / c^2}, \quad v'_2 = \frac{v_2 \sqrt{(1-v^2/c^2)}}{1 - v_1 v / c^2}, \quad v'_3 = \frac{v_3 \sqrt{(1-v^2/c^2)}}{1 - v_1 v / c^2} \tag{14}$$

Vier-impuls, vier-snelheid, vier-versnelling en vier-kracht

Om tot uitdrukkingen en relaties tussen deze belangrijke mechanische grootheden in de SRT te komen, gaan wij uit van het ***principe van de minste aktie*** (***principe van Hamilton***). Gesteld is dat er voor ieder mechanisch systeem een zekere integraal S bestaat, de ***actie***, die voor de werkelijke beweging van het systeem een minimum waarde vertoont. De variatie δS ervan is dus 0.

Om deze actie te bepalen stellen wij dat deze voor een vrij deeltje de volgende eigenschappen moet hebben:

- de integraal mag niet afhangen van de keuze van het referentiesysteem, dwz. dat hij invariant moet zijn onder Lorentz transformaties;
- de integrand moet dus afhangen van een scalar;
- de integrand moet een differentiaal van de eerste orde zijn.

De enige scalar die men zo kan construëren voor de integrand is $\alpha\, ds$ met een constante α, zodat:

$$S = -\int_a^b \alpha\, ds$$

waarbij α positief moet zijn voor een minimum van S.

Deze actie kan ook als een tijdintegraal en met de Lagrange functie L worden geschreven:

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

---

10 Zie Appendix A voor de uitwerking en voor een uitdrukking van de Lorentztransformatie bij een willekeurige richting van ***v***.

11 Omdat er geen zijdelingse contractie optreedt, is de volumecontractie gelijk aan de lengtecontractie

Voor lage snelheden en afgezien van een constante moet voor een vrij deeltje gelden dat $L = \frac{1}{2} m v^2$, zodat blijkbaar $\alpha = mc$ moet zijn. Hiermee hebben wij dus voor de actiefunctie en de Lagrangiaan gevonden:

$$\boxed{\begin{aligned} S &= -mc \int_a^b ds \\ L &= -mc^2 \sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})} \end{aligned}} \tag{15}$$

Wij passen nu het principe van minimum actie toe:

$$\delta S = -mc\,\delta \int_a^b ds = 0 \,.$$

Wordt dit uitgewerkt met $\delta ds = \delta(\sqrt{dx_i dx^i}\,) = \frac{dx_i \delta dx^i + dx^i \delta dx_i}{2\sqrt{(dx^i dx_i)}} = \frac{dx^i d\,\delta x_i}{ds} = \frac{dx_i d\,\delta x^i}{ds}$ en

$$\boxed{u^i \equiv c \frac{d x^i}{d s} = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2 / c^2)}} \frac{d x^i}{dt}} \,,\quad \boxed{u_i \equiv c \frac{d x_i}{d s} = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2 / c^2)}} \frac{d x_i}{dt}} \,, \tag{16}$$

dan is: $\delta S = -m \int_a^b u_i d\,\delta x^i$, en na partiële integratie: $\delta S = -m u_i \delta x^i \Big|_a^b + m \int_a^b \delta x^i \frac{du_i}{ds} ds$.

Voor de gebeurtenissen a en b is $\delta x^i = 0$, zodat de tweede term in het rechterlid bij iedere willekeurige δx^i 0 moet zijn, dwz dat $\frac{du_i}{ds} = 0$. ***Als wij nu de 4-vectoren*** u^i ***, resp.*** u_i ***interpreteren als de 4-snelheid en*** $p^i = m u^i$ ***resp.*** $p_i = m u_i$ ***als de 4-impuls van het deeltje, dan zijn deze dus constanten van de beweging van het vrije deeltje langs zijn werkelijke wereldlijn.***

Variëren wij nu de gebeurtenis b terwijl u^i constant blijft, dan vinden wij de variatie van S als functie van δx^i als

$$\boxed{\delta S = -m u_i \delta x^i} \text{ , of ook } \boxed{\delta S = -m u^i \delta x_i} \tag{17}$$

als wij bij de berekening van de integraal $\delta ds = u^i \delta dx_i$ in plaats van $\delta ds = u_i \delta dx^i$ hadden gebruikt (zie voetnoot).

In de niet-relativistische mechanika vonden wij dat de energie en impuls uit de actieintegraal S worden bepaald door $E = -\frac{\partial S}{\partial t}$ en $\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}$. Doen wij hier hetzelfde, dan vinden wij voor de contravariante en covariante ***4-impuls***:[12]

$$p^i = -\frac{\partial S}{\partial x_i} = m u^i \text{ , waarmee } \boxed{p^0 = m u^0 = \frac{mc}{\sqrt{(1 - v^2 / c^2)}} = \frac{E}{c}} \text{ en } \boxed{p^\alpha = m u^\alpha = +\frac{\partial S}{\partial x^i} = \frac{+m v^\alpha}{\sqrt{(1 - v^2 / c^2)}}} \tag{18}$$

en

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} = m u_i \text{ , waarmee } \boxed{p_0 = m u_0 = \frac{mc}{\sqrt{(1 - v^2 / c^2)}} = \frac{E}{c}} \text{ en } \boxed{p_\alpha = m u_\alpha = -\frac{\partial S}{\partial x^i} = \frac{-m v_\alpha}{\sqrt{(1 - v^2 / c^2)}}} \tag{19}$$

Wij zien dus dat ***energie en impuls de componenten zijn van één enkele 4-vector*** $p^i = (\frac{E}{c}, \mathbf{p})$ (of $p_i = (\frac{E}{c}, -\mathbf{p})$)[13] .

Uit het kwadraat van de 4-impuls $\boxed{p_i p^i = m^2 c^2}$ volgt nu de bekende relatie:

$$\boxed{E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \tag{20}$$

[14]

en de conclusie dat een deeltje een ***rustenergie*** bezit:

$$\boxed{E = mc^2} \tag{21}$$

---

12 Met de conventie $x^i = (ct,x,y,z)$ en $x_i = (ct,-x,-y,-z)$ is de 3-snelheid $v_\alpha = dx^\alpha / dt$ en gaat de contravariante p^α dus met het + teken.

13 Het ruimtelijke deel **p** van de 4-impuls p^i is dus **niet** gelijk aan de niet-relativistische impuls!

14 De relatie die de energie uitdrukt in (gegeneraliseerde) coördinaten en impulsen wordt de Hamiltoniaan van het systeem genoemd.

De componenten van de ***snelheids 4-vector*** u^i , zoals in (16) gedefiniëerd, zijn dus consistent met de gevonden uitdrukkingen voor p^i . Uitgeschreven voor het ruststelsel waarin men de beweging van het deeltje waarneemt, zijn u^i en u_i :

$$\boxed{u^i = c\frac{d\,x^i}{d\,s} = \left(\frac{c}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}\right)} \quad , \quad \boxed{u_i = c\frac{d\,x_i}{d\,s} = \left(\frac{c}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}, \frac{-\mathbf{v}}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}\right)} \tag{22}$$

In het met het deeltje meebewegende stelsel wordt gerelateerd naar de eigen tijd, $ds = c\,d\tau$:

$u^i = \frac{d\,x^i}{d\,\tau} = (c\,,\mathbf{u})$, waarbij $\mathbf{u}$ dan de ***eigen snelheid*** $\mathbf{u} \equiv \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}$ zou kunnen worden genoemd.

Op een overeenkomstige manier als de 4-snelheid worden de ***versnelling 4-vector*** en de ***kracht 4-vector*** gedefiniëerd:

$$a^i = c\frac{d\,u^i}{ds} = c^2\frac{d^2\,x^i}{d\,s^2} \tag{23}$$

en

$$\boxed{f^i = c\frac{dp^i}{ds} \;=\; mc\frac{d\,u^i}{ds} \;=\; m\,a^i \;=\; mc^2\frac{d^2\,x^i}{d\,s^2}} \tag{24}$$

Het kwadraat van de 4-snelheid is $u_i u^i = c^2\frac{dx^i}{ds}\frac{dx_i}{ds} = c^2\frac{ds^2}{ds^2} = c^2$ en het inproduct van 4-snelheid en 4-kracht is $u_i f^i = u^i f_i = 0$ [15], dus de 4-snelheid en 4-kracht zijn onderling orthogonaal evenals de 4-snelheid en de 4-versnelling. De 4-kracht kan hiermee worden uitgedrukt in de niet-relativistische kracht $\mathbf{f}$ als:

$$\boxed{f^i = \left(\frac{\mathbf{f}\,.\,\mathbf{v}}{c(1-v^2/\,c^2)}, \frac{\mathbf{f}}{(1-v^2/\,c^2)}\right)} \text{ [16]} \tag{25}$$

en zijn kwadraat is $f_i f^i = -\frac{\mathbf{f}\,.\,\mathbf{f}}{1-v^2/c^2} = -\frac{f^2}{1-v^2/c^2}$.

Beweging langs een wereldlijn

De punten van de wereldlijn kunnen worden gemerkt door de tijd te noteren waarop het deeltje op dat punt is, gemeten door een klok ter plekke van het deeltje die momentaan t.o.v. het deeltje in rust is. Zo kan de wereldlijn geparameteriseerd worden m.b.v. de eigentijd; de baan van het deeltje wordt dan vastgelegd door de functies $x^i(\tau)$ te specificeren die de positie van het deeltje in de Minkowskiruimte geven als functie van de eigentijd.
Zo kunnen de 4-impuls en 4-kracht worden geschreven als:

$$\boxed{p^i(\tau) = m\frac{d\,x^i(\tau)}{d\,\tau}} \quad \text{en} \quad \boxed{f^i(\tau) = m\frac{d^2\,x^i(\tau)}{d\,\tau^2}} \tag{26}$$

Tensoranalyse

Wij hebben hiervoor het begrip tensor al enekele keren genoemd. Het is van belang dat wij hier nu definiëren wat een tensor is, wat zijn eigenschappen zijn en hoe die van pas komen in de SRT (en later in de ART). Mathematisch gezien komen tensoren tot stand uit het tensorproduct van vectoren met vectoren, vectoren met tensoren of tensoren met tensoren, bijv.:

$$[A] * [B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}[B] & a_{12}[B] \\ a_{21}[B] & a_{22}[B] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

15 Dit volgt eenvoudig uit $mc\frac{d}{ds}u_i u^i = 0 = f_i u^i + f^i u_i$.

16 Immers $f^0 u_0 = f^0 c / \sqrt{(1-v^2/\,c^2)} = -f^\alpha u_\alpha = (f^\alpha . v_\alpha) / \sqrt{(1-v^2/\,c^2)}$.

Om tot een beter begrip van tensoren te komen kunnen wij uitgaan van 4-vectoren, van de covariante en contravariante vorm. De covariante vorm kan men zien als gerelateerd aan de afgeleiden van een scalar of een scalarveld, dus van een grootheid die niet verandert onder coördinatentransformaties zoals de Lorentztransformatie. Met $\phi'=\phi$ transformeert zo'n afgeleide, bijv. $U_m = \frac{\partial \phi}{\partial x^m}$, als $U'_m = \frac{\partial \phi}{\partial x'^m} = \frac{\partial \phi}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial x'^m} = \frac{\partial x^n}{\partial x'^m} U_n$.

Een grootheid U_m die op deze manier transformeert, dus als de afgeleide van een scalarveld, heet een ***covariante vector***:

$$\boxed{U'_m = \frac{\partial x^n}{\partial x'^m} U_n}.$$

Een ***contravariante vector*** transformeert als een coördinatenverschil, dus bijv. als een differentiaal: $dx'^m = \frac{\partial x'^m}{\partial x^n} dx^n$,

zodat hiervoor geldt: $$\boxed{V'^m = \frac{\partial x'^m}{\partial x^n} V^n}.$$

Wij zagen al eerder dat deze 4-vectoren, net als de 4-radius vector, invariant zijn onder de Lorentztransformatie, dwz. dat hun volledig kwadraat, zoals bij het Minkowski interval $x_i x^i$, constant is.

De betrekkingen voor de covariante U'_m en contravariante V'^m worden nu gegeneraliseerd tot ***tensoren***. Een covariante vector kunnen wij een tensor van het ***type** (0, 1)* noemen, een contravariante vector een tensor van het ***type** (1, 0)* en een scalar een tensor van het ***type** (0, 0)*. Een tensor van het ***type**(r, s)* is van ***contravariante graad*** *r* en ***covariante graad*** *s* en heeft dus *r* bovenindices en *s* benedenindices. Een voorbeeld van een covariante tensor type (0,2) is de Minkowski metrische tensor die wij al eerder introduceerden.

Zo'n tensor transformeert, net als 4-vectoren, volgens de regel dat voor elk van de bovenindices een factor $\partial x'^m / \partial x^n$ en voor elk van de benedenindices een transformatiefactor $\partial x^k / \partial x'^l$ moet worden bijgeschreven. Een gemengde tensor *Z* van het type (2, 1) transformeert bijv. als:

$$Z'^{m}{}_{n}{}^{l} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^k}\frac{\partial x^r}{\partial x'^n}\frac{\partial x'^l}{\partial x^s} Z^{k}{}_{r}{}^{s} . \tag{27}$$

Het bijzondere van een tensor is, dat door deze relatie (in analogie met het volledige kwadraat van 4-vectoren) hun kwadraat invariant is ten opzichte van ***willekeurige coördinatentransformaties***, en dus zeker onder Lorentztransformaties:

$$Z^{m}{}_{n}{}^{l} Z'_{m}{}^{n}{}_{l} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^k}\frac{\partial x^r}{\partial x'^n}\frac{\partial x'^l}{\partial x^s} Z^{k}{}_{r}{}^{s} \frac{\partial x^s}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^n}{\partial x^t}\frac{\partial x^u}{\partial x'^l} Z_{s}{}^{t}{}_{u} = \delta^s_k\, \delta^r_t\, \delta^u_s\, Z^{k}{}_{r}{}^{s} Z_{s}{}^{t}{}_{u} = Z^{s}{}_{t}{}^{u} Z_{s}{}^{t}{}_{u}$$

Deze eigenschap zal ons in de ART van pas komen.

Met (11) kunnen voor de SRT de transformatietermen in relaties als (27) worden geschreven als termen van de Lorentztransformatie L^i_j :

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = L^{i}{}_{j} \quad \text{en} \quad \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} = L_{i}{}^{k} \tag{28}$$

en hiermee transformeert dus de tensor in (27) voor ieder van de indices volgens de Lorentztransformaties:

bijv. $$Z'^{m}{}_{n}{}^{l} = L^{m}{}_{k}\ L_{n}{}^{r}\ L^{l}{}_{s}\ Z^{k}{}_{r}{}^{s} \tag{29}$$

Hiermee wordt de invariantie onder Lorentztransformaties net als hierboven voor algemene coördinatentransformaties uitgedrukt, bijv. :

$$Z'^{m}{}_{n}{}^{l}\ Z'_{m}{}^{n}{}_{l} = L^{m}{}_{p}\ L_{n}{}^{q}\ L^{l}{}_{r}\quad L_{m}{}^{s}\ L^{n}{}_{t}\ L_{l}{}^{u}\quad Z^{p}{}_{q}{}^{r}\ Z_{s}{}^{t}{}_{u} = \delta^s_p\, \delta^q_t\, \delta^u_r\ Z^{p}{}_{q}{}^{r}\ Z_{s}{}^{t}{}_{u} = Z^{p}{}_{q}{}^{r}\ Z_{p}{}^{q}{}_{r} \tag{30}$$

Samenvattend blijkt het belang van het gebruik van tensoren voor natuurkundige vergelijkingen:
1) Zij vormen een notatie die invariant is onder coördinatentransformaties (waaronder de Lorentztransformatie)
2) Tensorvergelijkingen blijven dus geldig ongeacht mogelijke inertiaaltransformaties
3) Zij laten een compacte schrijfwijze toe van de vergelijkingen
4) Zij laten zich eenvoudig generaliseren tot een hogere contravariante en/of covariante graad en eventueel tot meer dimensies.

Theorema van Gauss [17]

17 Dit theorema werd het eerst ontdekt door Joseph-Louis Lagrange in 1762, en later onafhankelijk opnieuw ontdekt door Carl Friedrich Gauss in 1813, door George Green in 1825 en in 1831 door Mikhail Vasilievich Ostrogradsky, die ook het eerste bewijs leverde. Variaties op de

Dit theorema wordt herhaaldelijk gebruikt in de theoretische natuurkunde, en in ons geval bij de theorie van de SRT en ART. Daarom wordt het hier in het kort afgeleid voor de 3D situatie. Voor de Minkowski-ruimte kan hetzelfde worden afgeleid, zij het dat de 4-divergentie ook een afgeleide naar x^0 bevat.

Wij gaan uit van een volumeelementje op de plaats (x, y, z) met zijden $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ in een vectorveld $\boldsymbol{j}=(j_x, j_y, j_z)$ (dit zou bijvoorbeeld een stroomdichtheid kunnen zijn, dwz de hoeveelheid stroom van iets, die per seconde door een eenheidsoppervlak gaat).
Het volumeelementje heeft ter plaatse x en $x+\Delta x$ een oppervlak groot $\Delta y \times \Delta z$, ter plaatse y en $y+\Delta y$ groot $\Delta z \times \Delta x$, en ter plaatse z en $z+\Delta z$ groot $\Delta x \times \Delta y$.

De hoeveelheden van $\boldsymbol{j}$ die in de x-richting ter plaatse x en $x+\Delta x$ door het yz-oppervlak stromen zijn j_x en $j_x+\frac{\partial j_x}{\partial x}\Delta x$. Voor de y-richting zijn dit j_y en $j_y+\frac{\partial j_y}{\partial y}\Delta y$ resp. j_z en $j_z+\frac{\partial j_z}{\partial z}\Delta z$. Bij het berekenen van het netto effect rekenen wij deze stromen hier positief als zij van binnen naar buiten door het oppervlak gaan, anders negatief. Dit betekent dat de netto effect voor het volumeelementje $\Delta V=\Delta x \Delta y \Delta z$ is:

$$(-j_x+j_x+\frac{\partial j_x}{\partial x}\Delta x)\Delta y \Delta z+(-j_y+j_y+\frac{\partial j_y}{\partial y}\Delta y)\Delta z \Delta x+(-j_z+j_z+\frac{\partial j_z}{\partial z}\Delta z)\Delta x \Delta y \text{ , ofwel}$$

$$(\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z})\Delta V \equiv (\nabla . \boldsymbol{j})\Delta V \tag{31}$$

Het blijkt dus dat de divergentie $(\nabla . \boldsymbol{j})$ van een vectorgrootheid aangeeft hoeveel er van deze grootheid wordt bijgemaakt ("sources") of verloren gaat ("sinks") in een volumeelementje.

Zoals uit de afleiding blijkt, kan dit resultaat ook geschreven worden als de netto uitstromende hoeveelheid per stukje oppervlak, gesommeerd over het hele oppervlak dat het volumeelementje omhult. Noemen wij een stukje van het omhullende oppervlak in vectornotatie $\Delta \boldsymbol{A}$, waarbij de richting van $\Delta \boldsymbol{A}$ die van de ***naar buiten gerichte normaal*** op dit oppervlakje is, dan is de bijdrage van $\boldsymbol{j}$ door dit oppervlakje gelijk aan $\boldsymbol{j} . \Delta \boldsymbol{A}$.

Voor een lichaam kunnen wij zo stellen dat het netto effect van het vectorveld enerzijds voldoet aan: $\oiint \boldsymbol{j} . d\boldsymbol{A}$ en anderzijds aan $\iiint \nabla . \boldsymbol{j}\, dV$, dus moet gelden dat:

$$\boxed{\int \nabla . \boldsymbol{j}\, dV = \oint \boldsymbol{j} . d\boldsymbol{A}} \text{ [18]} \tag{32}$$

Energie-impuls tensor

De tensorbeschrijving van de toestand van een mechanisch systeem is van groot belang voor de ontwikkeling van de ART, omdat deze invariant is onder Lorentztransformaties en – met inachtname van aangepaste tensoroperaties, zoals zal blijken – onder algemene coördinatentransformaties. Om tot een tensorbeschrijving te komen passen wij passen het principe van minimum actie toe op de actieintegraal [19]:

$$S=\int \Lambda\, dV\, dt=\frac{1}{c}\int \Lambda\, d\Omega .$$

Hierin is Λ op te vatten als de Lagrange dichtheidsfunctie, die een functie is van de gegeneraliseerde coördinaten $q^{(l)}$ ($l=1, ... N$, het aantal vrijheidsgraden van het systeem). Voor een gesloten systeem hangt Λ niet expliciet van x^i af.

Minimaliseren van S vereist dat:

$$\delta S=\frac{1}{c}\int \sum_l (\frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}}\delta q^{(l)}+\frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}_{,i}}\delta q^{(l)}_{,i})\, d\Omega=\frac{1}{c}\int \sum_l \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}}\delta q^{(l)}+\frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}_{,i}}\delta q^{(l)})-\delta q^{(l)}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}_{,i}}\right) d\Omega=0 \text{ ,}$$

waarbij de notatie $\boxed{q_{,i}\equiv\frac{\partial q}{\partial x^i}}$ is gebruikt. (33)

---

divergentiestelling werden dan ook naar hen genoemd. (bron: Wikipedia)

18 Omdat integratie over $d\boldsymbol{A}$ duidelijk een oppervlakteintegraal is, laten wij gewoonlijk ter vereenvoudiging het dubbele integraalteken weg. De cirkel erdoor betekent dat hier over een gesloten oppervlak moet worden geïntegreerd, dwz het oppervlak dat een volume omhult. Overeenkomstig duidt integratie over dV al aan dat het om een volumeintegraal gaat, zodat wij deze ook hier ter vereenvoudiging vaak met een enkel integraalteken weergeven.

19 Eerder gingen wij uit van de actie $S=-mc\int ds$ waarin wij deze gelijk stelden met $\int L\, dt$. De Lagrangiaan L in deze integrand kan $\frac{\partial T_i{}^k}{\partial x^k}=0$ worden gezien als de volumeintegraal over de hierboven gebruikte Lagrange dichtheidsfunctie Λ : $\int \Lambda\, dV$

De tweede term in de rechter integraal is een volumeintegraal van een divergentie, die met Gauss' theorema kan worden omgezet in een oppervlakte integraal van $\frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}_{,i}} \delta q^{(l)}$ over het hypervlak dat de hele ruimte Ω omhult en die in ∞ dan 0 bijdraagt. Bij willekeurige $\delta q^{(l)}$ resulteren dan de ***bewegingsvergelijkingen***:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}_{,i}} = 0\ . \tag{34}$$

Om tot een ***tensoruitdrukking*** te komen gebruiken wij nu deze bewegingsvergelijkingen en de relatie $\frac{\partial q^{(l)}_{,k}}{\partial x^i} \equiv q^{(l)}_{,ik} = q^{(l)}_{,ki}$ om $\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i}$ uit te werken:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \sum_l \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}} \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}_{,k}} \frac{\partial q^{(l)}_{,k}}{\partial x^i} \right) = \sum_l \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}_{,k}} \right) q^{(l)}_{,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}_{,k}} \frac{\partial q^{(l)}_{,i}}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sum_l q^{(l)}_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}_{,k}} \right)$$

Maar ook geldt $\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \delta^k_i \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k}$, zodat het verschil van de twee uitdrukkingen een verdwijnende divergentie oplevert:

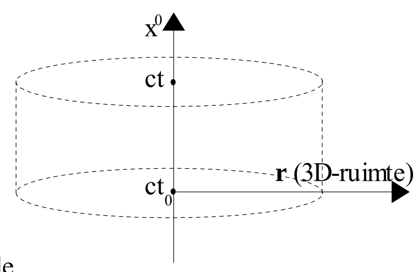
$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sum_l q^{(l)}_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}_{,k}} - \delta^k_i \Lambda \right) = 0\ . \tag{35}$$

Hiermee definiëren wij de tensor [20] :

$$\boxed{T_i^{\ k} = \sum_l q^{(l)}_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}_{,k}} - \delta^k_i \Lambda}\ , \tag{36}$$

waarvan blijkens (35) de divergentie 0 is: $\boxed{\frac{\partial T_i^{\ k}}{\partial x^k} = 0}$ [21]. (37)

Het verdwijnen van deze divergentie betekent, dat de volumeintegraal hiervan over over de 4-ruimte (zie figuur) tussen de hypervlakken op $x^0 = ct$ en $x^0 = c\,t_0$ ook 0 is. Deze volumeintegraal over de divergentie is echter gelijk aan de integraal van T^k_i zelf, genomen over de hypervlakken die het 4-volume begrenzen. Aannemend dat de bijdragen in deze integraal voor het hypervlak $x^1, x^2\, en\, x^3 = \infty$ verwaarloosbaar zijn, concluderen wij dat alleen de bijdragen van het ct en van het ct_0 hypervlak meedoen en dat deze dus aan elkaar gelijk moeten zijn [22]. Elk van deze hypervlakken omvat de hele 3D-ruimte, eerst ten tijde t_0 en later ten tijde t. Dus bij integratie over het hypervlak ten tijde *t* is de vector:



$$P_i = const \int T_i^{\ k} dS_k = const \int T_i^{\ 0} dV$$

een ***constante van de beweging van het systeem***.

In het bijzonder zijn $P_0 = const \int T_0^{\ 0} dV$ en $T_0^{\ 0} = \sum_l \dot{q}^{(l)} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^{(l)}} - \Lambda$. Vergelijken wij dit met de uitdrukking die met de Lagrange bewegingsvergelijkingen en het principe van Hamilton in de klassieke mechanika werd gevonden voor de energie, nl. $E = \sum_l \dot{q}^{(l)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{(l)}} - L$, ***dan associeren wij $T_0^{\ 0}$ met de energiedichtheid en P_0 met de energie,*** beide afgezien van een constante. Voor de ruimtelijke componenten van P_i geldt dan met $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2, 3$, dat

$$P_\alpha = const \int q_{\beta,\alpha} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{\beta,0}} dV = const * c \int \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_\alpha} dV$$

Vergelijken wij $\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_\alpha}$ in de laatste integraal ook weer met de klassieke uitdrukking voor de impuls $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$, ***dan zien wij hier dus de impulsdichtheid***. Stellen wij de constante nu $1/c$, dan blijkt de ***4-impuls*** P_i dus te te worden bepaald

20 Appendix B geeft het bewijs dat wij hier werkelijk met een tensor te maken hebben, nl dat (36) transformeert volgens (27)

21 De divergentie (37) laat toe dat aan $T_i^{\ k}$ een functie $\frac{\partial}{\partial x^l} \psi^{kl}_i$ met $\psi^{kl}_i = -\psi^{lk}_i$ wordt toegevoegd en ook de 4-impuls (20) verandert hierdoor niet. Zo kan $T_i^{\ k}$ symmetrisch worden gemaakt, wat nodig is voor het behoud van impulsmoment (bepaald door de 4-tensor van impulsmoment, die wij hier niet verder bespreken)

22 De normaal van deze hypervlakken is naar buiten gericht en dus tegengesteld voor de hypervlakken voor $t = t$ en dat bij $t = t_0$

door kolom 0 van de tensor $T_i^{\ k}$:

$$\boxed{P_i = \frac{1}{c}\int T_i^{\ k}\,dS_k = \frac{1}{c}\int T_i^{\ 0}\,dV} \tag{38}$$

Bijgevolg stelt $T_0^{\ 0}$ de **_energiedichtheid_** voor en $\frac{1}{c}T_\alpha^{\ 0} \equiv \pi_\alpha$ de **_impulsdichtheid_**. Hierom noemen wij de tensor $T_i^{\ k} = q_{,i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,k}} - \delta_i^k\Lambda$ de **_energie-impuls tensor_** van het systeem.

Inzicht in de andere componenten volgt door $\frac{\partial T_i^{\ k}}{\partial x^k} = 0$ (37) uit te schrijven in tijd- en ruimtecomponenten:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T_0^{\ 0}}{\partial t} + \frac{\partial T_0^{\ \alpha}}{\partial x^\alpha} = 0 \quad , \quad \frac{1}{c}\frac{\partial T_\alpha^{\ 0}}{\partial t} + \frac{\partial T_\alpha^{\ \beta}}{\partial x^\beta} = 0 \tag{39}$$

en deze over het volume V in de 3D-ruimte te integreren.

De *eerste* vergelijking van (39) levert: $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int T_0^{\ 0}dV + \int\frac{\partial T_0^{\ \alpha}}{\partial x^\alpha}dV = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int T_0^{\ 0}dV + \oint T_0^{\ \alpha}dA_\alpha = 0$, zodat

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T_0^{\ 0}dV = -\oint c\,T_0^{\ \alpha}dA_\alpha \,.$$

Het linkerlid is de snelheid van verandering van de energie binnen het volume, dus is het rechterlid de energie die door de omhullende oppervlakken wegstroomt. De vector $\psi = (c\,T_0^{\ 1}, c\,T_0^{\ 2}, c\,T_0^{\ 3})$ vertegenwoordigt dan deze **_energiestroomdichtheid_**. Gezien de symmetrie van de tensor (zie voetnoot 20) blijkt dus ook dat de energiestroomdichtheid $c\,T_0^{\ \alpha}$ gelijk is aan c^2 maal de impulsdichtheid $T_\alpha^{\ 0}/c$.

De *tweede* vergelijkingvan (39) levert: $\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{1}{c}T_\alpha^{\ 0}dV = -\oint T_\alpha^{\ \beta}dA_\beta$.

Links staat nu de snelheid van verandering van de impuls in het volume V, zodat het rechterlid de impuls vertegenwoordigt die per tijdseenheid door het omhullende oppervlak stroomt. Binnen de 4-tensor $T_i^{\ k}$ staat dus de 3-tensor $T_\alpha^{\ \beta}$ voor de **_impulsstroomdichtheid_**.

Samenvattend hebben wij gevonden:
$T_0^{\ 0}$ = energiedichtheid
$T_0^{\ \beta}$ = energiestroomdichtheid Ψ^β (gedeeld door *c*)
$T_\alpha^{\ 0}$ = impulsdichtheid π_α (vermenigvuldigd met *c*) = T_0^α
$T_\alpha^{\ \beta}$ = impulsstroomdichtheid

$$\boxed{T_i^{\ k} = \left(\begin{array}{c|ccc} T_0^{\ 0} & . & T_0^{\ \beta} & . \\ \hline . & . & . & . \\ T_\alpha^{\ 0} & . & T_\alpha^{\ \beta} & . \\ . & . & . & . \end{array}\right) = \begin{pmatrix} E & \Psi_x/c & \Psi_y/c & \Psi_z/c \\ \Psi_x/c & \Pi_{xx} & \Pi_{xy} & \Pi_{xz} \\ \Psi_y/c & \Pi_{yx} & \Pi_{yy} & \Pi_{yz} \\ \Psi_z/c & \Pi_{zx} & \Pi_{zy} & \Pi_{zz} \end{pmatrix}}$$

Voor de $T_\alpha^{\ 0}$ -termen vonden wij al dat $T_\alpha^{\ 0} = c\,\pi_\alpha$. Voor een beter inzicht in de andere termen bezien wij $T_0^{\ \beta}$, die de energiestroomdichtheid (gedeeld door *c*) vertegenwoordigen. Dit is de snelheid waarmee de energiedichtheid $c\,\pi_0$ zich in de x^β -richting verplaatst. Dan is dus $T_0^{\ \beta} = c\,\pi_0\frac{dx^\beta}{dt}$, wat hetzelfde is als $c\,\pi_0\frac{u^\beta}{u^0}$ of $c\frac{\pi_0\pi^\beta}{\pi^0}$. Hetzelfde geldt voor de $T_\alpha^{\ \beta}$ -termen: deze vertegenwoordigen de snelheid waarmee de impulsdichtheid π_α (maal c) in de x^β -richting stroomt, dus $c\,\pi_\alpha\frac{dx^\beta}{dt} = c\,\pi_\alpha\frac{u^\beta}{u^0} = c\frac{\pi_\alpha\pi^\beta}{\pi^0}$. Wij zien dus, dat de E-P tensor in termen van de 4-snelheid of de 4-impulsdichtheid $\pi^i = \rho\,u^i$ eenvoudig kan worden geschreven als:

$$\boxed{\begin{aligned} T_i^{\ k} &= \frac{\rho c}{u^0}(u_i u^k) = \frac{c}{\pi^0}(\pi_i\pi^k) \\ T^{ik} &= \frac{\rho c}{u^0}(u^i u^k) = \frac{c}{\pi^0}(\pi^i\pi^k) \end{aligned}} \text{[23]} \tag{40}$$

23 In de onderste uitdrukking werd de index *i* met behulp van de Minkowski metrische tensor $T^{ik} = \eta^{il}T_l^k$ en $u^i = \eta^{il}u_l$ omhooggehaald

Hieruit blijkt ook weer de symmetrie van de tensor.

Appendix A

Lorentztransformatie

Wij willen de coëfficienten bepalen van een transformatie tussen het ene inertiaalstelsel K en een ander inertiaalstelsel K' dat in de positieve x^1 -richting van K beweegt. Hierbij zijn translaties en gewone rotaties in de $x^1 x^2$, $x^2 x^3$ en $x^3 x^1$ -vlakken niet van belang, want zij laten het interval $(\Delta s)^2$ zonder meer invariant, immers $(\Delta \mathbf{r})^2$ verandert niet. Dus blijven over de rotaties in het $x^0 x^1$, $x^0 x^2$, en $x^0 x^3$ -vlak. Wij bekijken nu de rotatie in het $x^0 x^1$ -vlak, waarbij dus de rotaties in het $x^0 x^2$ en $x^0 x^3$ -vlak onveranderd blijven en x^1 in een bepaalde relatie met x^0 verandert. Dit laatste zal dus een afhankelijkheid van de snelheid in x^1 -richting gaan opleveren, in overeenstemming met de beweging van K'.
De relevante termen van de transformatie (1) zijn dan:

$$\begin{aligned} x'^0 &= L^0{}_0 x^0 + L^0{}_1 x^1 \\ x'^1 &= L^1{}_0 x^0 + L^1{}_1 x^1 \end{aligned} \quad \text{, en} \quad \begin{aligned} x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned}$$

De eis dat $ds^2 = ds'^2$ levert na enig gereken de ***Lorentztransformaties***:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \pm x^1 \sinh(\alpha) + x^0 \cosh(\alpha) \\ x'^1 &= \quad x^1 \cosh(\alpha) \pm x^0 \sinh(\alpha) \end{aligned} \text{, waarbij } \sinh(\alpha) \equiv \frac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) \text{ en } \cosh(\alpha) \equiv \frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) \text{ .}$$

De parameter α bepalen wij als volgt: voor de oorsprong van K is $x^1 = 0$, dus is $x'^1 = x^0 \sinh(\alpha)$ en $x'^0 = x^0 \cosh(\alpha)$, waarmee $\tanh(\alpha) = \frac{x'^1}{x'^0} = -\frac{v}{c}$ (in termen van K' beweegt K zich immers in negatieve x'^1 -richting), zodat:

$$\sinh(\alpha) = \pm \frac{v/c}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} \text{ en } \cosh(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} \text{ .}$$

Het is duidelijk dat ook hier weer het negatieve teken van de sinh moet worden gekozen. Zo vinden wij de ***Lorentztransformaties***:

$$\boxed{\begin{aligned} x'^0 &= \frac{x^0 - v x^1/c}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} \\ x'^1 &= \frac{x^1 - v x^0/c}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned}} \quad \text{of} \quad \boxed{L^i{}_j = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c & 0 & 0 \\ -v/c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Als deze beweging zich in een andere richting in het xy-vlak zou afspelen, hadden wij deze eerst met een gewone rotatie in het xy-vlak kunnen transformeren naar de x^1 -richting. Zo'n rotatie wordt beschreven met een matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Algemener kan bij een geschikte keuze van de termen van de 3x3 submatrix rechtsonder zo een willekeurige rotatie in de 3D-ruimte (dwz gewone rotaties in de $x^1 x^2$, $x^2 x^3$ en $x^3 x^1$ -vlakken waarbij de lengte van een vector gelijk blijft) worden beschreven met de matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ 0 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} .$$

Door deze rotatie te combineren met de eerdere uitdrukking vinden wij de Lorentztransformatie voor beweging van K' in een willekeurige richting:

$$\boxed{L^i{}_j = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c & 0 & 0 \\ -v/c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ 0 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}}$$

Appendix B

Is $T_i{}^k$ in (36) een tensor?

Als $T_i{}^k = \sum_l q_{,i}^{(l)} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}^{(l)}} - \delta_i^k \Lambda$ een tensor is, moet hij als een tensor transformeren bij een coördinatentransformatie van het stelsel x^i naar het stelsel ξ^i. Wij bezien de onderdelen $q_{,i}$, δ_i^k en $\partial q_{,k}$ apart.

1) $q_{,i} = \frac{\partial q}{\partial x^i} = \frac{\partial q}{\partial \xi^r} \frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} = \frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} q'_{,r}$

2) $\delta_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^s} \frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^s}{\partial \xi^r} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^s} \frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} \delta'^{\,s}_{\,r}$

3) $\partial q_{,k} = \partial \left(\frac{\partial q'}{\partial \xi^s} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} \right) = \partial \left(\frac{\partial q'}{\partial \xi^s} \right) \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} + \frac{\partial q'}{\partial \xi^s} \frac{\partial^2 \xi^s}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^m} \partial \xi^m = \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} \partial \left(\frac{\partial q'}{\partial \xi^s} \right) = \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} \partial q'_{,s}$, omdat bij lineaire transformaties de term $\frac{\partial^2 \xi^s}{\partial x^k \partial x^l}$ wegvalt.

Hiermee wordt de transformatie:

$$T_i{}^k = \frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} q'_{,r} \frac{\partial \Lambda'}{\frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} \partial q'_{,s}} - \frac{\partial x^k}{\partial \xi^s} \frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} \delta'^{\,s}_{\,r} = \frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^s} \left(q'_{,r} \frac{\partial \Lambda'}{\partial q'_{,s}} - \delta'^{\,s}_{\,r} \Lambda' \right) = \frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^s} T'_r{}^s$$

en hieruit blijkt dat $T_i{}^k$ inderdaad een tensor is.

Appendix C

Uitwerking van de E/P-tensor voor een vrij systeem

Als voorbeeld berekenen wij nu de tensor T_i^k voor een vrij systeem, waarvoor blijkens (15) de Lagrange dichtheidsfunctie $\Lambda = \rho c^2 \sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})}$ is. Werken wij hiermee de tensor uit met $(q_1, q_2, q_3)=(x^1, x^2, x^3)$ en $\alpha, \beta, ... = 1,2,3$ dan vinden wij met (27):

(1) $T_0^0 = q_{\alpha,0}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{\alpha,0}} - \Lambda = v_\alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial v_\alpha} - \Lambda = v_\alpha \frac{\rho v_\alpha}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} + \rho c^2 \sqrt{(1-v^2/c^2)} = \frac{\rho c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}$. Zoals eerder al bleek is dit de energiedichtheid.

(2) In rij β zijn de overige elementen $T_\beta^0 = q_{\alpha,\beta}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{\alpha,0}} = \delta_\beta^\alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial v_\alpha} c = \delta_\beta^\alpha \frac{\rho v_\alpha c}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} = c \frac{\rho v_\beta}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}$, dus c maal de impulsdichtheid.

(3) De term $T_0^\beta = q_{\alpha,0}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{\alpha,\beta}}$ in kolom β is wat lastiger. Wij schrijven eerst voor

$$\partial q_{\alpha,\beta} = \frac{\partial q_{\alpha,\beta}}{\partial q_{\gamma,0}} \partial q_{\gamma,0} = \frac{(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta})}{(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^0})} \partial q_{\gamma,0} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^0}{\partial x^\beta} \partial q_{\gamma,0} = \delta_\gamma^\alpha \frac{c}{v_\beta} \partial q_{\gamma,0} = \frac{c}{v_\beta} \partial q_{\alpha,0}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_{\alpha,\beta}} = \frac{\partial q_{\alpha,0}}{\partial q_{\alpha,\beta}} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha,0}} = \frac{(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^0 \partial x^l} \partial x^l)}{(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^k} \partial x^k)} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha,0}} = \frac{(\frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^0}) \partial x^l}{(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^k}) \partial x^k} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha,0}} = \frac{\frac{\partial}{\partial x^l}(\frac{v_\alpha}{c}) \partial x^l}{\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\frac{v_\alpha}{c}) \partial x^0} = \frac{v_\beta}{c} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha,0}},$$

waarmee dan $T_0^\beta = q_{\alpha,0} \frac{v_\beta}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{\alpha,0}} = \frac{v_\beta}{c} v_\alpha \frac{\rho v_\alpha}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} = \frac{v^2}{c} \frac{\rho v_\beta}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}$, dus $\frac{v^2}{c}$ maal de impulsdichtheid. Deze term is nu niet gelijk aan T_β^0, dus de tensor is niet zonder meer symmetrisch[24].

(4) Op dezelfde manier is $T_\alpha^\beta = q_{\gamma,\alpha} \frac{v_\beta}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{\gamma,0}} = \delta_\alpha^\gamma v_\beta \frac{\rho v_\gamma}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} = \frac{\rho v_\alpha v_\beta}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}$, dus volledig symmetrisch.

Vullen wij de gevonden termen in de energie-impuls tensor is, dan vinden wij:

$$T_i^k = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})}} \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho v^2 v_1/c & \rho v^2 v_2/c & \rho v^2 v_3/c \\ \rho c v_1 & \rho v_1^2 & \rho v_1 v_2 & \rho v_1 v_3 \\ \rho c v_2 & \rho v_2 v_1 & \rho v_2^2 & \rho v_2 v_3 \\ \rho c v_3 & \rho v_3 v_1 & \rho v_3 v_2 & \rho v_3^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})}} \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho c v_1 & \rho c v_2 & \rho c v_3 \\ \rho c v_1 & \rho v_1^2 & \rho v_1 v_2 & \rho v_1 v_3 \\ \rho c v_2 & \rho v_2 v_1 & \rho v_2^2 & \rho v_2 v_3 \\ \rho c v_3 & \rho v_3 v_1 & \rho v_3 v_2 & \rho v_3^2 \end{pmatrix} - A_i^k.$$

Hier is de tensor gesplitst in de symmetrische energie-impuls tensor en een niet-symmetrische tensor A_i^k:

$$A_i^k = \sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})} \begin{pmatrix} 0 & \rho c v_1 & \rho c v_2 & \rho c v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

waarvan de divergentie $\partial A_i^k / \partial x^k$ verdwijnt[25] in (37), zodat wij ons tot de symmetrische tensor kunnen beperken.

---

24 De tensor is te symmetreren op de manier die in voetnoot 20 is aangegeven, waarbij dus voldaan moet worden aan $\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0$

25 Voor de rijen 1,2 en 3 is $\frac{\partial A_\alpha^k}{\partial x^k} = 0$ immers vanzelfsprekend en voor een vrij deeltje bleek $\boldsymbol{v}$ al bij (16) constant, zodat ook

$$\frac{\partial A_0^k}{\partial x^k} = 0 + \frac{\partial A_0^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 + \rho c \frac{\partial v_\alpha \sqrt{(1-v^2/c^2)}}{\partial x^\alpha} = 0 + \rho c \sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})} \nabla . \boldsymbol{v} + \rho c \boldsymbol{v} . \nabla \sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})} = 0$$