Inleiding Klassieke (Galileïse en Newtonse) mechanica [1]

I. Referentie- en inertiaalstelsels [2]

Om processen die plaatsvinden in de natuur te beschrijven is een **referentiesysteem** nodig:

- systeem van coördinaten om de positie van een deeltje in de ruimte vast te leggen, én
- aan dit systeem gekoppelde klokken om de tijd aan te geven

Een voorbeeld van zo'n referentiesysteem is een **inertiaalstelsel**: een stelsel van ruimte- en tijdcoördinaten waarin de **traagheidswet** geldt: een vrij massadeeltje (dus in afwezigheid van erop inwerkende uitwendige krachten) is óf in rust óf het beweegt zich met een constante snelheid (grootte en richting) voort.
Bij transformaties naar een willekeurig ander referentiestelsel hoeft dit niet te gelden, maar er bestaan transformaties waarbij de traagheidswet blijft gelden en die dus weer een inertiaalstelsel leveren.
Stel dat in het oorspronkelijke inertiaalstelsel de plaats en snelheid van het deeltje worden bepaald door de vectoren $\boldsymbol{r}(t)$ en $\boldsymbol{v}$ en in een willekeurig ander referentiestelsel met $\breve{\boldsymbol{r}}(\breve{t})$ en $\breve{\boldsymbol{v}}$. De tijd is in de Galileïsche (Newtonse) mechanika een absolute grootheid, dus voor alle referentiesystemen is $\breve{t} = t$. Als de algemene relatie tussen de nieuwe en de oude coördinaten gegeven is door $\breve{x}^i = G^i(x^1, x^2, x^3)$, $(i = 1, 2, 3)$, ofwel $\breve{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$, dan kan voor $\breve{\boldsymbol{v}}$ worden geschreven:

$$\breve{\boldsymbol{v}} = \frac{d\breve{r}}{d\breve{t}} = \frac{(d\boldsymbol{r}.\nabla)\boldsymbol{G} + dt\dfrac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial t}}{dt} = (\boldsymbol{v}.\nabla)\boldsymbol{G} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial t}$$

Hieruit blijkt dat $\breve{\boldsymbol{v}}$ alleen in richting en grootte constant kan zijn als de G^i lineaire functies van de coördinaten en de tijd zijn, $\breve{x}^i = G^i_j x^j + G^i_0 t + C^i \quad (i, j = 1,2,3)$ waarin G^i_j en C^i constanten zijn. Dit is dus een voorwaarde voor de transformaties tussen inertiaalsystemen (de constanten C^i beschrijven eenvoudige translaties, die hier triviaal zijn).

II. Relativiteitsprincipe van Galilei [3]

In een inertiaalstelsel geldt het **relativiteitsprincipe**: *alle natuurwetten zijn hetzelfde in alle inertiale referentiesystemen; alle inertiaalsystemen zijn in dit opzicht volledig equivalent.* Dit houdt in dat de vergelijkingen van de natuurwetten **invariant** zijn onder **Galileï-transformaties** van coördinaten en tijd van het ene inertiaalsysteem naar een ander [4]:

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}t \\ t = t' \end{array}}$$

Interacties tussen materiële deeltjes worden beschreven door een potentiële energie van interactie, als functie van alleen de coördinaten. Impliciet wordt dus aangenomen dat een verandering van de posities van één van de betrokken deeltjes **onmiddellijk** van invloed is op de andere deeltjes.

De **klassieke of Newtonse mechanica** is op dit Galileïsche relativiteitsprincipe is gebaseerd. Hier zijn:

1. de **tijd absoluut**: er is één tijd verondersteld voor alle referentiesystemen; het tijdsinterval tussen twee gegeven gebeurtenissen is hetzelfde voor alle referentiesystemen en er kan zinvol met *gelijktijdigheid* van gebeurtenissen worden gewerkt;
2. de **afstanden absoluut** tussen gelijktijdige gebeurtenissen in de ruimte (tussen *niet-gelijktijdige* gebeurtenissen zijn de afstanden relatief)

III. Wetten van Newton

1) Een vrij lichaam volhardt in zijn rusttoestand of in zijn éénparige, rechtlijnige beweging.
2) De verandering van de impuls $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}$ (de hoeveelheid van beweging) van een lichaam is evenredig met de effectief op het lichaam werkende kracht: $\dot{\boldsymbol{p}} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$.
3) Actie en reactie zijn gelijk in grootte, maar tegengesteld gericht.

---

1 Dit is een selectieve samenvatting van de materie zoals die wordt behandeld in:
- Landau en Lifschitz: Course of Theoretical Physics Vol I, Mechanics, 1960 (**LL1**)
- R. Kronig: Collegedictaat Theoretische Natuurkunde TUD, 1965 (**K1**)
- B.W. Carroll & D.A. Ostlie: Introduction to Modern Astrophysics (**CO**)
- J.W. van Holten: Gravitatie - van Zwaartekracht tot Kosmologie, collegesyllabus VU, 2000 (**JWvH**)

2 Zie JWvH

3 Zie LL1

4 Het is duidelijk dat de Galileïtransformatie aan de hierboven genoemde transformatievoorwaarden voldoet

Met deze wetten kunnen wij hier voor een gesloten systeem het behoud van energie en het behoud van impulsmoment afleiden [5].

1. Met de 2e wet geldt voor de j^e puntmassa $m_j \quad (j=1,2,...)$ op posities $\boldsymbol{r}_j$ van een gesloten systeem:

$$m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{F}'_j + \sum_k \boldsymbol{F}_{kj} \qquad \text{(K1-2.1)}$$

Hierin is $\boldsymbol{F}'_j$ de uitwendige kracht en $\boldsymbol{F}_{jk} = -\boldsymbol{F}_{kj}$ zijn de onderlinge krachten tussen de puntmassa's. Voor het hele systeem is dus:

$$\sum_j m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \frac{d}{dt}\sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j \equiv \dot{\boldsymbol{P}} = \sum_j \boldsymbol{F}'_j + \sum_{j \neq k} \boldsymbol{F}_{kj} = \sum_j \boldsymbol{F}'_j = \boldsymbol{F}'\text{, dus}$$

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{F}'} \qquad \text{(K1-2.2)}$$

waarin $\boldsymbol{P}$ **de totale impuls van het systeem van puntmassa's** is en $\boldsymbol{F}'$ **de totale uitwendige kracht**. Voor een gesloten systeem is $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{0}$, dus is **de totale impuls een constante van de beweging van een gesloten systeem.**

2. Het **zwaartepunt** $\boldsymbol{r}_0$ van het systeem wordt gedefiniëerd door de relatie

$$\boxed{m\,\boldsymbol{r}_0 = \sum_j m_j \boldsymbol{r}_j} \qquad \text{(K1-2.7)}$$

waarin

$$\boxed{m = \sum_j m_j} \qquad \text{(K1-2.8)}$$

de totale massa van het systeem is. Hiermee geldt dan ook $m\,\ddot{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{F}'$: het zwaartepunt van het systeem beweegt alsof de hele massa hier geconcentreerd is en alle uitwendige krachten hier aangrijpen.

3. **Scalaire** vermenigvuldiging van $\sum_j m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_j \boldsymbol{F}_j$ met $\dot{\boldsymbol{r}}_j$ levert $\sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_j \dot{\boldsymbol{r}}_j \cdot \boldsymbol{F}_j$.
Stel nu dat er een potentiële energie $\boxed{U}$ als functie van de coördinaten van de puntmassa's bestaat, waarmee geldt dat $\boldsymbol{F}_j = -\nabla U$ en wordt de **kinetische energie** gedefiniëerd als:

$$\boxed{T = \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j^2}\text{, dan is:}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j^2 = \sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_j \dot{\boldsymbol{r}}_j \cdot \boldsymbol{F}_j = -\sum_j \left(\frac{\partial U}{\partial x_j}\dot{x}_j + ...\right) = -\frac{dU}{dt}\text{ , dus}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T + U) = 0}$$

De som van kinetische en potentiële energie $T + U$ **is dus een constante van de beweging van een gesloten systeem**.

Met gebruik van het zwaartepunt $\boldsymbol{r}_0$ is voor het j^e deeltje $\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}'_j$, waarbij $\boldsymbol{r}'_j$ betrokken is op het zwaartepunt. Hiermee is de kinetische energie van het systeem te schrijven als

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m_j (\dot{\boldsymbol{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{r}}'_j)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_j m_j\right)\dot{\boldsymbol{r}}_0^2 + \dot{\boldsymbol{r}}_0 \cdot \sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}'_j + \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{\boldsymbol{r}}'^2_j = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}_0^2 + \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{\boldsymbol{r}}'^2_j = T_0 + T'$$

(omdat op grond van 2.7 en 2.8 de term $\sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}'_j$ 0 is). **Hier blijkt de kinetische energie van het systeem gelijk aan de kinetische energie van de totale massa geconcentreerd in het zwaartepunt plus die van de bewegende deeltjes ten opzichte van het zwaartepunt.**

---

5 Zie K1

4. **Vector**vermenigvuldiging van de identiteit $\sum_j m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_j \boldsymbol{F}_j$ met $\boldsymbol{r}_j$ levert :

$$\sum_j m_j \boldsymbol{r}_j \times \ddot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_j \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j = \sum_j \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}'_j + \sum_j \sum_{k \neq j} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{kj}$$

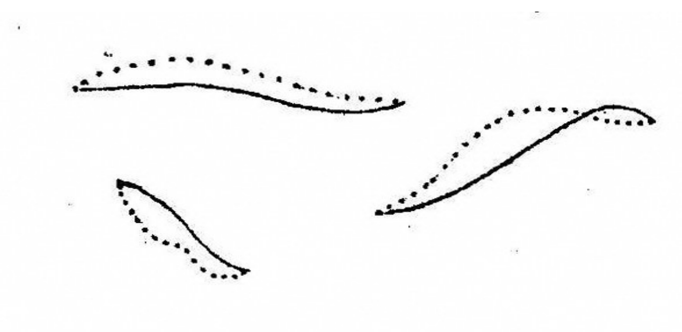
Nu is $\boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{kj} + \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_{jk} = (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k) \times \boldsymbol{F}_{kj} = \mathbf{0}$, omdat bij centrale krachten $\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k$ en $\boldsymbol{F}_{kj}$ gelijk gericht zijn. Dan is

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \sum_j m_j \boldsymbol{r}_j \times \dot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_j \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}'_j \equiv \boldsymbol{M}'$$, en dus

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} = \boldsymbol{M}'}$$

waarbij $\boxed{\boldsymbol{b} = \sum_j m_j \boldsymbol{r}_j \times \dot{\boldsymbol{r}}_j}$ en $\boxed{\boldsymbol{M}' = \sum_j \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}'_j}$ het totale impulsmoment en het totale draaimoment van de uitwendige krachten voorstellen. Hieruit blijkt dus dat **het impulsmoment een constante is van de beweging van een gesloten systeem ($\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{0}$).**

IV. Beginsel van Hamilton en bewegingsvergelijkingen van Lagrange [6]



Integratie over de tijd van het scalaire product van de virtuele verplaatsing $\delta \boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}'_j - \boldsymbol{r}_j$ (deze is $\mathbf{0}$ voor $t = t_1$ en $t = t_2$) en de identiteit $\sum_j (m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j - \boldsymbol{F}_j) = \mathbf{0}$ levert:

$$\boxed{\int_{t1}^{t2} \sum_j (m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j - \boldsymbol{F}_j) . \delta \boldsymbol{r}_j dt = 0} \qquad \text{(K1-3.3)}$$

Nu is de **eerste** term in (K1-3.3):

$$\int_{t1}^{t2} \sum_j m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j . \delta \boldsymbol{r}_j \, dt = \cancel{\sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j . \delta \boldsymbol{r}_j \Big|_{t1}^{t2}} - \int_{t1}^{t2} \sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j . \frac{d}{dt}(\delta \boldsymbol{r}_j) \, dt = - \int_{t1}^{t2} \sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j . \frac{d}{dt}(\delta \boldsymbol{r}_j) \, dt \, .$$

Hierin is $\frac{d}{dt} \delta \boldsymbol{r}_j = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}'_j - \boldsymbol{r}_j) = \dot{\boldsymbol{r}}'_j - \dot{\boldsymbol{r}}_j = \delta \dot{\boldsymbol{r}}_j$ en tot in de eerste orde van $\delta \dot{\boldsymbol{r}}_j$ is verder:

$$- \sum_j m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j . \delta \dot{\boldsymbol{r}}_j \approx - \sum_j \frac{1}{2} m_j (\dot{\boldsymbol{r}}_j + \delta \dot{\boldsymbol{r}}_j)^2 + \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j^2 = -\delta (\sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j^2) = -\delta T \, .$$

De eerste term vertegenwoordigt dus de kinetische energie en is nu te schrijven als:

$$\int_{t1}^{t2} \sum m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j . \delta \boldsymbol{r}_j \, dt = - \int_{t1}^{t2} \delta T \, dt \qquad \text{(K1-3.4)}$$

Bij de **tweede** term nemen wij aan dat de kracht op het j^e deeltje algemeen geschreven kan worden als $\boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{F}'_j + \boldsymbol{F}''_j$, waarin $\boldsymbol{F}'_j = -\nabla U$ en $\dot{\boldsymbol{F}}''_j$ *bovendien* snelheidsafhankelijk is volgens:

$$\boldsymbol{F}''_j = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial G}{\partial x_j} , \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{y}_j}\right) - \frac{\partial G}{\partial y_j} , \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{z}_j}\right) - \frac{\partial G}{\partial z_j} \right)$$

De bijdrage van $\boldsymbol{F}'_j$ in (3.3) is:

$$- \int_{t1}^{t2} \sum_j \boldsymbol{F}'_j . \delta \boldsymbol{r}_j \, dt = + \int_{t1}^{t2} \sum_j \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial U}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial U}{\partial z_j} \delta z_j \right) dt = \int_{t1}^{t2} \delta U \, dt \qquad \text{(K1-3.5)}$$

6 Zie K1

Die van $\boldsymbol{F}''_j$ is:

$$-\int_{t1}^{t2} \sum_j \boldsymbol{F}''_j . \delta \boldsymbol{r}_j \, dt =$$

$$-\int_{t1}^{t2} \sum_j \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_j} \right) \delta x_j - \frac{\partial G}{\partial x_j} \delta x_j + \ ... \right) dt = \int_{t1}^{t2} \sum_j \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_j} \delta \dot{x}_j + \frac{\partial G}{\partial x_j} \delta x_j + \ ... \right) dt = \int_{t1}^{t2} \delta G \, dt \qquad \text{(K1-3.6)}$$

Hierin verdwijnen de door partiële integratie ontstane termen $\sum_j \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j$, omdat die op de integratiegrenzen t_1 en t_2 nul opleveren. Met (K1-3.4-6) en

$$\boxed{L = T - U - G} \text{ , de } \textit{functie van } \textbf{\textit{Lagrange,}} \qquad \text{(K1-3.8)}$$

wordt (3.3) nu $\int_{t1}^{t2} \sum_j (m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j - \boldsymbol{F}_j) . \delta \boldsymbol{r}_j \, dt = 0 = -\int_{t1}^{t2} (\delta T - \delta U - \delta G) \, dt$, of

$$\boxed{\delta \int_{t1}^{t2} L \, dt = 0} \qquad \text{(K1-3.7)}$$

Uit deze variatiemethode blijkt het **beginsel van Hamilton**, dat stelt dat voor de werkelijke beweging de tijdintegraal van de Lagrangefunctie, de ***actiefunctie***, een extreme waarde heeft voor het traject van t_1 naar t_2 (waarbij op t_1 en t_2 de fictieve beweging met de werkelijke samenvalt).
Dit beginsel is niet gebonden aan rechthoekige coördinaten en meer algemene, **gegeneraliseerde coördinaten** (bijv. pool-, cilindercoördinaten) kunnen evengoed gebruikt worden om de toestand van het systeem van puntmassa's te beschrijven.

Het beginsel van Hamilton is een fundamenteel principe in de mechanica. Het zal dan ook voor afleidingen in de Speciale en Algemene Relativiteitstheorie nog herhaaldelijk worden gebruikt. Ter illustratie worden hieronder met dit principe de bewegingsvergelijkingen van Lagrange en de wetten van Newton afgeleid [7].

V. Bewegingsvergelijkingen van Lagrange en constanten van de beweging

Van een mechanisch systeem van N puntmassa's zijn de posities bepaald door 3N (gegeneraliseerde) coördinaten q_j , het systeem heeft dus $3N$ vrijheidsgraden.
De *ervaring* leert dat de mechanische toestand van dit systeem volledig is bepaald als ook alle $3N$ snelheden $\dot{q}_j$ tegelijkertijd met de q_j vastliggen. In dit geval kunnen de posities op latere tijdstippen voorspeld worden.

Voor een systeem dat zich beweegt van positie $q_j^{(1)}$ op tijdstip t_1 naar $q_j^{(2)}$ op tijdstip t_2 is met de Lagrange functie L de zgn. **actie integraal** (tijdintegraal van *L* als een energie grootheid)

$$S = \int_{t1}^{t2} \sum_{j=1}^{3N} L(q_j, \dot{q}_j) \, dt \qquad \text{(LL1-2.1)}$$

Voor een minimum moet δS nul zijn, dus [8]:

$$\delta S = \int_{t1}^{t2} \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = 0$$

---

7 Zie L&L-1. De gedachtengang is nu dus anders dan in de voorafgaande afleidingen, waar de wetten van Newton als vertrekpunt werden genomen om tot behoud van energie en impulsmoment te concluderen.

8 Merk op dat in (2.1) zonder bezwaar aan L de volledige tijdsafgeleide van een willekeurige functie $f(q_j)$ kan worden toegevoegd, omdat hiervoor de variatie $\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f \, dt = \delta f(q_j^{(2)}, t_2) - \delta f(q_j^{(1)}, t_1) = 0$

met $\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt}\delta q_j$ is na partiële integratie $\delta S = \sum_{j=1}^{3N} \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j \Big|_{t1}^{t2}} + \int_{t1}^{t2} \sum_{j=1}^{3N} (\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j})\delta q_j \, dt$ (LL1-2.5)

Omdat dit voor elke willekeurige δq_j geldt, moet worden voldaan aan:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \qquad (j=1,2,..,3N)} \qquad \text{(LL1-2.6)}$$

Dit zijn de **bewegingsvergelijkingen van Lagrange**, in dit geval $3N$ relaties tussen versnellingen, snelheden en plaatscoördinaten. Het zijn 2^e orde differentiaalvergelijkingen voor de functies $q_j(t)$ en hun oplossingen bevatten $6N$ willekeurige constanten. Hiermee is het in principe mogelijk om deze functies en zo het pad van de beweging te bepalen [9]

Als wij op grond van het Galileïsche relativiteitsprincipe stellen dat de **ruimte homogeen en isotroop is** (de eigenschappen zijn onafhankelijk van de positie en van de richting in de ruimte), en dat **de tijd homogeen is**, heeft dit de volgende consequenties:

1. Voor een vrije lichaam betekent de homogeniteit van ruimte en tijd dat de Lagrange functie noch de coördinaten, noch de tijd t expliciet mag bevatten: L kan dus alleen een functie zijn van de snelheid $\boldsymbol{v}$. Vanwege de isotropie moet L onafhankelijk van de richting van $\boldsymbol{v}$ zijn, dus moet L een functie zijn van $|\boldsymbol{v}|$ of v^2 alleen: $L=L(v^2)$.
   Dan is met $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$ dus $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{0}$, zodat $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{constant}$. Omdat $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}$ alleen een functie van $\boldsymbol{v}$ kan zijn, **moet dus $\boldsymbol{v}$ constant zijn naar richting en grootte**. **Dit is Newtons 1^e wet (de wet van de traagheid)**

2. Stel dat een **vrij** lichaam wordt geobserveerd in een inertiaalstelsel dat zich met een kleine snelheid $\boldsymbol{\epsilon}$ verplaatst ten opzichte van het ruststelsel. Dan is in dit stelsel $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\epsilon}$ en de Lagrangiaan L' moet dan, op een constante of een totale afgeleide naar de tijd van een functie na, gelijk zijn aan L dus:
   $$L'(\boldsymbol{v}'^2)=L(\boldsymbol{v}'^2)=L(\boldsymbol{v}^2 + 2\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^2) \approx L(\boldsymbol{v}^2) + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}^2} 2\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\epsilon}$$
   De laatste term kan alleen een totale tijdsafgeleide zijn (en dus wegvallen in de bewegings-vergelijkingen, zie voetnoot 21 op pag 11) als deze een lineaire functie van $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ is, zodat $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}^2} = constant \equiv m$ en dus $L = \frac{1}{2} m v^2$ gesteld kan worden. **Als constante is hier zo de (trage) massa $\boxed{m}$ geïntroduceerd** [10].

3. Voor een gesloten systeem van massadeeltjes (alleen interacties tussen de deeltjes van dit systeem onderling) is *gebleken* dat de interacties kunnen worden beschreven door aan de Lagrangiaan van de deeltjes zonder wisselwerking, een functie U van de coördinaten toe te voegen die afhangt van de aard van de interacties [11]:
   $$\boxed{L = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j \boldsymbol{v}_j^2 - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N)}$$
   Met deze vorm van L is de bewegingsvergelijking voor het j^e deeltje:

9 Bijv. $L = \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 \Rightarrow m\ddot{x}_j = 0 \Rightarrow \dot{x}_j = c_{j0} \Rightarrow x_j = c_{j0}t + c_{j1}$

10 Hiermee is $L' = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}'^2 = \frac{1}{2} m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\epsilon})^2 = \frac{1}{2} m v^2 - m\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2} m\boldsymbol{\epsilon}^2 = L - \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{r}.\boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{2} m\boldsymbol{\epsilon}^2 t)$, dus invariant onder de Galileïtransformatie

11 Van de interacties wordt impliciet ondersteld dat deze hun werking onmiddellijk laten gelden, omdat U alleen van de posities van alle deeltjes op hetzelfde moment afhangt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_j}\text{, of } m_j \frac{d\,\boldsymbol{v}_j}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_j}.$$

Wordt $\boxed{\boldsymbol{F}_j \equiv -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_j}}$ geïnterpreteerd als de kracht die werkt op het j^e deeltje, dan staat hier de **tweede wet van Newton**.

4. Stel dat de systemen A en B samen een gesloten systeem vormen, terwijl systeem B een bepaalde beweging uitvoert (dus met bekende $q_B(t)$ en $\dot{q}_B(t)$). In dit geval beweegt A in een extern veld, nl. dat van B en is $L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B)$, waarin T_B alleen van de tijd afhangt, dus gezien kan worden als een totale tijdafgeleide die in de bewegingsvergelijkingen wegvalt. Als nu systeem A een enkel massapunt m is, dan worden de Lagrangiaan en de bewegingsvergelijking van m in het externe veld afkomstig van B geschreven als:

$$\boxed{\begin{gathered} L = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 - U(\boldsymbol{r}, t) \\ \boldsymbol{F} = m\dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \end{gathered}}$$

5. Op grond van de **homogeniteit van de tijd** hangt L niet expliciet van de tijd af, dus geldt: $\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}}$. Met de bewegingsvergelijkingen kan $\frac{\partial L}{\partial q_j}$ worden vervangen door $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, zodat $\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \dot{q}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$ en dus: $\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right) = 0$. Hieruit blijkt dat de **energie**, hier gedefiniëerd als:

$$\boxed{E \equiv \sum_{j=1}^{N} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L} \qquad \text{(LL1-6.1)}$$

een constante is van de beweging. **Homogeniteit van de tijd leidt dus tot behoud van energie gedurende de beweging.**
Dit resultaat geldt zolang L niet expliciet van de tijd afhangt, dus ook in een constant veld.

Euler's theorema [12] voor de homogene kwadratische functie T levert $\sum \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 2T$ waarmee voor de energie geldt:

$$\boxed{E = T + U} \qquad \text{(LL1-6.2)}$$

6. Op grond van **homogeniteit van de ruimte** moeten voor een lichaam zonder interacties de verschillende posities in de ruimte mechanisch equivalent zijn. Onder een transformatie voor een systeem van deeltjes op posities $\boldsymbol{r}_j$ naar $\boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{\epsilon}$ mag dan $L = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j \boldsymbol{v}_j^2 - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots,)$ niet veranderen, dus moet voor willekeurige $\boldsymbol{\epsilon}$, dus $\delta L = 0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_j}.\delta \boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{\epsilon}.\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_j} = 0$. Hieruit blijkt dat

---

12 Een functie $f(\boldsymbol{r})$ is homogeen van graad k als $f(a\boldsymbol{r}) = a^k f(\boldsymbol{r})$. Differentiatie naar a levert $\frac{\partial f(a\boldsymbol{r})}{\partial a\boldsymbol{r}}.\frac{d(a\boldsymbol{r})}{da} = k a^{k-1} f(\boldsymbol{r})$. Met $a=1$ volgt dan $x_j \frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial x_j} = k f(\boldsymbol{r})$, of $\boldsymbol{r}.\nabla f(\boldsymbol{r}) = k f(\boldsymbol{r})$, het Theorema van Euler.

$$\boxed{\sum \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_j} = 0 = -\sum \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_j} = \sum \boldsymbol{F}_j}.$$

Voor 2 deeltjes is dit $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$, **de 3e wet van Newton: Actie = - Reactie**

Nu worden de bewegingsvergelijkingen van Lagrange: $\sum_j \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_j} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_j}}\right) = \frac{d}{dt}\sum_j \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_j} = \boldsymbol{0}$

en met de definitie $\boldsymbol{P} \equiv \sum_j \boldsymbol{p}_j \equiv \sum_j \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_j}$ $(= \sum_j m_j \boldsymbol{v}_j$ voor het gesloten systeem) (LL1-7.2)

betekent dit dus dat $\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0}$: **de impuls van het gesloten systeem blijft constant gedurende de beweging.**
Beschouwen wij weer een enkel deeltje in interactie met de rest van het gesloten systeem, dan blijkt:

$$\dot{\boldsymbol{p}}_j - \boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$$, **de 2e wet van Newton**

7. Op grond van de **isotropie van de ruimte** mogen de mechanische eigenschappen van een gesloten systeem niet veranderen als dit in zijn geheel op een willekeurige manier wordt gedraaid in de ruimte. Bij een draaiïng over een kleine hoek $\delta\boldsymbol{\phi}$ zijn: $\delta\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{r}$ en $\delta\boldsymbol{v} = \delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{v}$. Nu moet (met gebruik van de bewegingsvergelijkingen):
$$\delta L = 0 = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_j}\delta\boldsymbol{r}_j + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_j}\delta\boldsymbol{v}_j\right) = \sum_j \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_j}\right)\delta\boldsymbol{r}_j + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_j}\delta\boldsymbol{v}_j\right)$$ of
$$0 = \sum_j \left(\dot{\boldsymbol{p}}_j . \delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{p}_j . \delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{v}_j\right) = \delta\boldsymbol{\phi} . \sum_j \left(\boldsymbol{r}_j\times\dot{\boldsymbol{p}}_j + \boldsymbol{v}_j\times\boldsymbol{p}_j\right) = \delta\boldsymbol{\phi} . \frac{d}{dt}\sum_j \boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{p}_j .$$

Uit de isotropie van de ruimte volgt dus dat van een gesloten systeem **het impulsmoment**
$\boldsymbol{B} \equiv \sum_j \boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{p}_j$ **een constante van beweging is.**

8. **Schaalbaarheid**
De bewegingsvergelijkingen van Lagrange veranderen niet als de Lagrangiaan met een constante wordt vermenigvuldigd. Dit heeft consequenties in een aantal belangrijke gevallen, bijv. wanneer de potentiële energie een *homogene functie van graad k* is van de coördinaten. Voor zo'n homogene functie geldt per definitie bij een constante α , dat:
$$U(\alpha\boldsymbol{r}_1, \alpha\boldsymbol{r}_2, \ldots, \alpha\boldsymbol{r}_n) = \alpha^k U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n) \qquad \text{(LL1-10.1)}$$

Wij transformeren nu naar nieuwe coördinaten volgens $\boldsymbol{r}'_j = \alpha\boldsymbol{r}_j$ en $t' = \beta t$, waardoor $\boldsymbol{v}'_j = \frac{\alpha}{\beta}\boldsymbol{v}_j$,
$T' = \frac{\alpha^2}{\beta^2}T$, $U' = \alpha^k U$ en het impulsmoment $B' = \frac{\alpha^2}{\beta}B$. Als nu $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k$, dus $\beta = \alpha^{1-k/2}$, dan wordt de Lagrangiaan eenvoudigweg vermenigvuldigd met een constante factor α^k . Zo'n transformatie van de tijd en de ruimtelijke afmetingen $l \to l'$ houdt in dat het pad van de bewegingen ruimtelijk wordt opgeschaald en dat
$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2} = \alpha^{1-k/2} \qquad \text{(LL1-10.2)}$$

Wij beschouwen de volgende paar gevallen:
1. Bij een beweging in kleine oscillaties is de potentiële energie een kwadratische functie van de coördinaten, dus *k=2*. In dit geval volgt uit (10.2) dat de trillingstijd onafhankelijk is van de amplitude.
2. In een uniform krachtveld is de potentiële energie een lineaire functie van de coördinaten, dus *k=1*. Hier is dan $\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{l}}$. Zo is in een zwaartekrachtsveld de valtijd evenredig met de wortel van de valhoogte.

3. De wederzijdse aantrekking tgv de zwaartekracht of Coulomb interactie is omgekeerd evenredig met de onderlingen afstand, dus *k=-1*. Dan is $\frac{t'}{t} = (\frac{l'}{l})^{3/2}$, overeenkomstig Kepler's derde wet (zie K1-3.16 verderop).

9. **Het viriaal theorema**

Als de potentiële energie een homogene functie is van de coördinaten én de beweging begrensd is tot een eindig gebied in de ruimte, dan bestaat er een belangrijk verband tussen de gemiddelde kinetische en potentiële energie.
Omdat de kinetische energie T een kwadratische functie van de snelheden is, geldt op grond van *Euler's theorema* [13] over homogene functies dat $\sum_j \boldsymbol{v}_j \cdot \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{v}_j} = 2T$. Met de impuls $\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{v}_j} = \boldsymbol{p}_j$ hebben wij dan:

$$2T = \sum_j \boldsymbol{p}_j \cdot \boldsymbol{v}_j = \frac{d}{dt}(\sum_j \boldsymbol{p}_j \cdot \boldsymbol{r}_j) - \sum_j \boldsymbol{r}_j \cdot \dot{\boldsymbol{p}}_j \qquad \text{(LL1-10.4)}$$

Van deze vergelijking nemen wij het gemiddelde over de tijd. Voor het tijdgemiddelde $\overline{f}$ van een willekeurige functie *f(t)* geldt

$$\overline{f} \equiv \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$$

Als nu *f(t)* kan worden geschreven als de tijdafgeleide van een begrensde functie $F(t)$ *,* dan is:

$$\overline{f} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt} dt = \lim_{\tau\to\infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0 \text{ [14]}$$

zodat de eerste term in het rechterlid van (LL1-10.4) verdwijnt in het gemiddelde. Stellen wij $\dot{\boldsymbol{p}}_j = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_j}$, dan volgt voor het gemiddelde van (LL1-10.4):

$$2\overline{T} = \overline{\sum_j \boldsymbol{r}_j \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_j}} \qquad \text{(LL1-10.5)}$$

Het rechterlid van (10.5) is het zgn *viriaal van Clausius*, dat ook weer op grond van Euler's theorema voor een homogene potentiële energiefunctie van graad *k* gelijk is aan:

$$2\overline{T} = k\overline{U} \qquad \text{(LL1-10.6)}$$

Omdat $\overline{T} + \overline{U} = \overline{E} = E$, volgt uit (LL1-10.6) dat

$$\overline{U} = \frac{2E}{k+2} \qquad \overline{T} = \frac{kE}{k+2} \qquad \text{(LL1-10.7)}$$

Bijgevolg blijkt dat:
1. Voor kleine oscillaties met $k=2$ geldt $\overline{T} = \overline{U} = E/2$.
2. Voor zwaartekrachtinteracties met $k=-1$ geldt $\overline{U} = 2E$ en $\overline{T} = -1/2 U = -E$ (de beweging vindt alleen in een begrensd deel van de ruimte plaats als de energie negatief is – zie K1-3.13 verderop).

Het viriaal theorema is van belang bij diverse berekeningen in de astrophysica [15], bijv.:
- stervorming
- evolutie van de accretieschijf
- planeetvorming
- evolutie en interactie van melkwegstelsels en van clusters van melkwegstelsels

In deze gevallen gaat het om de bepaling van de energie van het systeem uit de gemiddelde potentiële energie. Als bijv. uit het samentrekken van een gaswolk een ster ontstaat, verdwijnt de oorspronkelijke energie van de gasdeeltjes en is deze dus omgezet in andere energievormen (warmte, gravitatiegolven).

---

13 Zie voetnoot 12
14 Dezelfde uitkomst geldt het geval dat $F(t)$ periodiek is en τ de periode voorstelt waarover wordt geïntegreerd. De limiet is dan onnodig.
15 Zie CO pp 447, 695, 829, 1006, 1061 en 1078

10. **Energie en impuls als afgeleiden van de actiefunctie**
Omdat dit bij afleidingen in de SRT en ART nog enkele malen zal terugkomen is het nuttig om hier ook de energie en impuls direct uit de actiefunctie S (LL1-2.1) af te leiden. Beschouwt men in (LL1-2.5) het begin van het pad, ten tijde t_1, vast en wordt het eindpunt, ten tijde t, gevariëerd, dan kan in

$$\delta S = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \bigg|_{t1}^{t} + \int_{t1}^{t} \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \, dt$$

de actie S beschouwd worden als een expliciete functie $S(t)$ van de tijd. Hierin valt in het rechterlid de tweede term weg, omdat gedurende de beweging aan de bewegingsvergelijkingen moet worden voldaan. Hiermee is dan te schrijven:

$$\delta S = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j = \sum_j p_j \delta q_j \text{ , en dus}$$

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} \qquad \text{(LL1-43.3)}$$

Verder is $S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$, dus $L = \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_j p_j \dot{q}_j$
en met (LL1-6.1):

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - L = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = E$$

volgt nu:

$$E = -\frac{\partial S}{\partial t} \qquad \text{(LL1-43.5)}$$

VI. Newtonse zwaartekracht [16]

Newtons wet van de zwaartekracht stelt dat twee massa's een aantrekkende kracht op elkaar uit oefenen die evenredig is met beide massa's, en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand:

$$\boldsymbol{F} = G m_1 m_2 \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Hierin is G de gravitatieconstante van Newton, m_1 en m_2 de massa's van de lichamen en $\boldsymbol{r}/r$ de eenheidsvector die de richting van de kracht aangeeft, centraal langs de as die de massamiddelpunten van de lichamen verbindt.

- Vanuit een historisch gezichtspunt leverde Newtons wet de eerste kwantitatieve beschrijving van een fundamentele natuurkracht. Zij leidt tot een correcte beschrijving van zwaartekrachts verschijnselen zoals de vrije val, de worp van een bal of ander projectiel, en de slingerbeweging.

- De belangrijkste toepassing was de verklaring van de beweging van de maan om de aarde en van de planeten om de zon, zoals vastgelegd in de drie empirische wetten van Kepler:
    1. De banen van de planeten om de zon zijn kegelsneden (ellipsen), met de zon in een van de brandpunten.
    2. In gelijke tijden doorloopt de voerstraal (het lijnstuk dat een planeet met de zon verbindt) gelijke oppervlakken.
    3. Het kwadraat van de omlooptijd van een planeet om de zon is evenredig met de derde macht van de (halve) lange as.

- Ook de getijden in de oceaan konden als samenspel tussen zwaartekracht en centrifugale (schijn)kracht begrepen worden. Daarmee leverde de fysica van de zwaartekracht een bewijs, dat dezelfde natuurwetten die gelden voor verschijnselen op aarde ook van toepassing zijn op de

16 Zie JWvH

beweging van hemellichamen. Met andere woorden, Newtons wet leidde tot een unificatie van de aardse en de hemelmechanica.
Het natuurwetenschappelijk en filosofisch belang hiervan kan in historisch perspektief nauwelijks worden overschat: Newtons beschrijving van de zwaartekracht was en is een paradigma dat vele ontwikkelingen in de natuurwetenschap tot op de dag van vandaag beinvloedt.

VII. Equivalentie van zware en trage massa [17]

- In de hoofdwet van de Newtonse mechanica wordt de massa ingevoerd als de evenredigheidsconstante die vastlegt welke kracht nodig is om een lichaam een bepaalde versnelling te geven. Deze grootheid wordt daarom de **trage massa**, m_t genoemd.

- Uit de vorm van de zwaartekrachtwet van Newton blijkt de massa van een lichaam nog een andere rol te spelen: als de grootheid die de sterkte van de zwaartekracht bepaalt die op een ander lichaam wordt uitgeoefend. Deze grootheid wordt daarom de **zware massa**, m_z genoemd.

- Aangezien de actie- en reactiekracht tussen twee lichamen in grootte aan elkaar gelijk zijn, is de versnelling g die een lichaam met trage massa m_t en zware massa m_z krijgt onder invloed van de zwaartekracht van een ander lichaam met zware massa M_z
$$F = m_t g = -G\frac{M_z m_z}{r^2} \quad \Rightarrow \quad g = -\frac{G M_z}{r^2}\frac{m_z}{m_t}$$
ook afhankelijk van de verhouding m_z/m_t . Empirisch blijkt echter deze verhouding tot in een precisie van 10^{-12} constant te zijn. Bij een geschikte keuze van eenheden kan deze verhouding dus gelijk 1 worden gesteld. Het gevolg van het constant zijn is dat g onafhankelijk is van de eigen massa m .

- <u>Dit is een groot verschil is met andere krachten, zoals de elektrische kracht waarbij de versnelling die een lichaam ondergaat evenredig is met zowel het elektrisch veld als met de eigen elektrische lading.</u>

VIII. Beweging van een puntmassa in een centraal krachtveld [18]

1. **Gereduceerde massa en zwaartepunt**
Wordt het systeem beschouwd van twee massa's m_1 en m_2 in interactie met elkaar, dan is hiervan de Lagrangiaan [19]:
$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^{\,2} - U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) \qquad \text{(LL1-13.1)}$$
Met de relatieve plaatsvector $\boxed{\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}$ en de oorsprong in het zwaartepunt is $m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{0}$
en zijn $\boldsymbol{r}_1 = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$ en $\boldsymbol{r}_2 = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$ (LL1-13.2)

Hiermee kan de Lagrangiaan worden geschreven als:
$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(r)} \qquad \text{(LL1-13.3)}$$
waarin m de <u>gereduceerde massa</u> is: $\boxed{m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}$ (LL1-13.4)

Het **systeem mag dus worden beschreven met een Lagrangiaan voor een deeltje met massa m in een extern veld $U(r)$ dat centraal symmetrisch is rond de oorsprong.**

2. **Eerste wet van Kepler (Perkenwet)**

17 Zie CO, Ch 16
18 Zie K1 en LL1
19 Zie LL1

Voor de beweging van het deeltje met (gereduceerde) massa m in het centrale veld moet het impulsmoment $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ behouden blijven. Dit houdt in dat de beweging plaatsvindt in het vlak loodrecht op $\boldsymbol{b}$ en beschreven kan worden met de poolcoördinaten r en ϕ .

Hiermee is de Lagrangiaan [20] $L = T-U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r)$ en zijn de bewegingsvergelijkingen van Lagrange:

$$m\ddot{r} - m r\dot{\phi}^2 + \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \qquad \text{(K1-3.8)}$$

$$\frac{d}{dt}(m r^2 \dot{\phi}) = 0 \qquad \text{(K1-3.9)}$$

Hieruit volgt dat het impulsmoment $b = m r^2 \dot{\phi}$ **constant is**. Het oppervlak $\frac{1}{2} r^2 \dot{\phi}$ dat per tijdseenheid wordt bestreken door de radiusvector is hiermee gelijk aan $\frac{b}{2m}$ en dus ook constant (**Perkenwet van Kepler**). Hiermee wordt (K1-3.8) nu:

$$m\ddot{r} - \frac{b^2}{mr^3} + \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

3. **Baanvergelijking en Eerste wet van Kepler**

Om voor de baan van de puntmassa de relatie $r = r(\phi)$ te vinden, vervangen wij differentiaties naar t door die naar ϕ volgens $\dot{\phi} = \frac{b}{mr^2}$, $\dot{r} = \frac{dr}{d\phi}\dot{\phi} = \frac{b}{mr^2}\frac{dr}{d\phi}$ en

$$\ddot{r} = -\frac{2b}{mr^3}\dot{r}\frac{dr}{d\phi} + \frac{b}{mr^2}\frac{d^2 r}{d\phi^2}\dot{\phi} = -\frac{2b^2}{m^2 r^5}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{b^2}{m^2 r^4}\frac{d^2 r}{d\phi^2} .$$

Hiermee wordt de baan van de puntmassa, het verband tussen r en ϕ , gegeven door de differentiaalvergelijking:

$$\frac{b^2}{mr^4}\left[\frac{d^2 r}{d\phi^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - r\right] + \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \qquad \text{(K1-3.10)}$$

Voor de integratie van deze uitdrukking moet eerst de relatie $U(r)$ bekend zijn. Voor een puntmassa m_p in het Newtonse zwaartekrachtsveld van de zon met massa m_z is de potentiële energie:

$$\boxed{U = -\frac{G m_p m_z}{r}} .$$

Stellen wij in (3.10) $r = \frac{1}{s}$, dus $\frac{dr}{d\phi} = -\frac{1}{s^2}\frac{ds}{d\phi}$ en $\frac{d^2 r}{d\phi^2} = \frac{2}{s^3}\left(\frac{ds}{d\phi}\right)^2 - \frac{1}{s^2}\frac{d^2 s}{d\phi^2}$, dan resulteert voor de baan de inhomogene 2e orde differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2 s}{d\phi^2} + s = G m_p m_z \frac{m}{b^2} \quad \text{met de oplossing} \quad s = G m_p m_z \frac{m}{b^2} + C\cos(\phi - \phi_0) \qquad \text{(K1-3.11)}$$

Met de constanten $p = \frac{b^2}{G m_p m_z m} = \frac{r^4 \dot{\phi}^2}{G(m_p + m_z)}$ en $\epsilon = \frac{C b^2}{G m_p m_z m} = \frac{C r^4 \dot{\phi}^2}{G(m_p + m_z)}$ is $r = r(\phi)$ te schrijven als:

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\phi - \phi_0)}} \qquad \text{(K1-3.12)}$$

De radiusvector beschrijft zo een ellips voor $\epsilon < 1$ [21] (**eerste wet van Kepler**), een parabool voor $\epsilon = 1$ en een hyperbool voor $\epsilon > 1$.

4. **Energie en baanvorm**

Langs de baan is de energie $E = T + U$ constant, terwijl in het perihelium $\dot{r} = 0$, zodat daar (met

20 Zie K1

21 Het zwaartepunt ligt in één van de brandpunten van de ellips; de brandpunten van de ellips liggen op $\pm\epsilon\, p/(1-\epsilon^2) = \epsilon a$ ten opzichte van met middelpunt ervan.

$m\,r^2\dot{\phi}=b$) geldt:

$$E = \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - \frac{G\,m_p m_z}{r} = \frac{b^2}{2\,m\,r^2} - \frac{G\,m_p m_z}{r}$$

of $$\boxed{E = \frac{G\,m_p m_z}{2p}(1+\epsilon)^2 - \frac{G\,m_p m_z}{p}(1+\epsilon) = \frac{G\,m_p m_z}{2p}(\epsilon^2-1)} \qquad \text{(K1-3.13)}$$

De ellipsbaan treedt dus op bij $E<0$, de parabolische baan voor $E=0$ en de hyperbolische voor $E>0$.

5. **Tweede en derde wet van Kepler**
Bij een ellipsvormige baan bestrijkt de radiusvector per tijdseenheid een **constant** oppervlak $\frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \frac{b}{2\mathrm{m}}$, dit is **Keplers tweede wet**. Het oppervlak A van de ellips is $\pi\,a^2\sqrt{1-\epsilon^2}$, als $a = \frac{1}{2}(\frac{p}{(1+\epsilon)} + \frac{p}{(1-\epsilon)}) = \frac{p}{1-\epsilon^2}$ de halve lange as is. Het oppervlak is dan $A = \pi\frac{p^2}{(1-\epsilon^2)^{3/2}}$ en de omlooptijd T_o dus:

$$T_o = A.\frac{2\mathrm{m}}{b} = \frac{2\,\pi\,mp^2}{b(1-\epsilon^2)^{3/2}} \qquad \text{(K1-3.15)}$$

Hiermee volgt **Keplers derde wet** nu uit quotiënt van a^3 en $T_o^{\,2}$ volgens:

$$\boxed{\frac{a^3}{T_o^{\,2}} = \frac{b^2(1-\epsilon^2)^3}{4\pi^2 m^2 p^4}.\frac{p^3}{(1-\epsilon^2)^3} = \frac{b^2}{4\pi^2 m^2\,p} = \frac{G(m_p+m_z)}{4\pi^2}} \qquad \text{(K1-3.16)}$$

of, met $\omega_o = 2\,\pi/T_o$: $\boxed{\omega_o^{\,2}a^3 = G(m_p+m_z)}$

De hier bepaalde lange as is die van het fictieve massapunt met gereduceerde massa m ten opzichte van het zwaartepunt, en ook van een planeet rond de (centraal gestelde) zon. De lange assen van de zon- en planeetbanen *ten opzichte van het zwaartepunt* zijn echter met (LL1-13.2) een factor $m_z/(m_z+m_p)$ resp. $m_p/(m_z+m_p)$ kleiner.

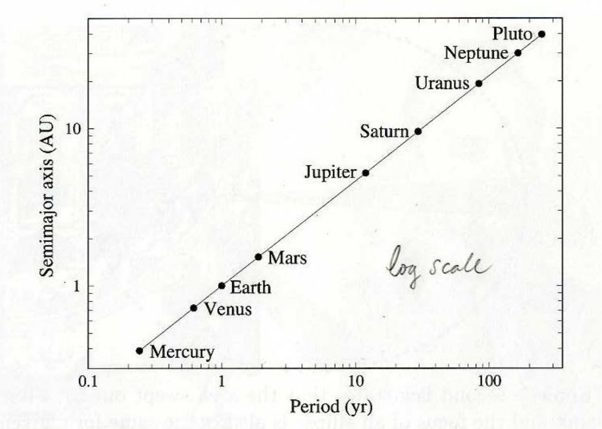


Figure 2.3 Kepler's third law for planets orbiting the Sun.

<u>Opmerkingen</u>:

- Omdat $m_z \gg m_p$, wordt een vrijwel vast verband tussen de omlooptijden en de halve lange assen van alle planeetbanen in ons zonnestelsel gevonden: $\frac{a^3}{T_o^{\,2}} = \frac{G\,m_z}{4\pi^2} = 3.366\,x\,10^{18}\;\; m^3\,s^{-2}$
- De baan van bijna alle planeten blijkt zo vrijwel alleen bepaald te worden door de zwaartekracht van de zon. Slechts Pluto, de lichtste planeet en het verst van de zon, ondergaat enige andere invloeden (zoals die van Neptunus); Jupiter en Saturnus beïnvloeden elkaar zwak (afwijkingen van minder dan 1%).
- Bij een waarde van $G=6.673\,x\,10^{-11}\,Kg^{-1}m^3\,s^{-2}$ voor Newtons constante volgt dan voor de massa van de zon dat $M_z=1.989\,x\,10^{30}\,Kg$. Keplers wetten stellen ons dus in staat de zon te wegen, met als enige kennis de waarde van Newtons constante en de belangrijkste parameters van een of meer planetenbanen.
- Op dezelfde manier kan men uit de beweging van aardsatellieten de massa van de aarde bepalen. Deze bedraagt $M_a=5.97\,x\,10^{24}\,Kg$ en is inderdaad in hoge benadering verwaarloosbaar t.o.v. de massa van de zon in de berekening van de aardbaan.

6. **Precessie**

Als wij bij de uitwerking van de baanvergelijking (K1-3.10) niet de gebruikelijke betrekking voor de potentiële energie $U = -\frac{GmM}{r}$ aannemen, maar een algemenere relatie $U = U(r)$, dan is de energie [22]:

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{b^2}{2mr^2} + U(r)\,, \qquad \text{(LL1-14.4)}$$

zodat

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{b^2}{m^2 r^2}\}} \qquad \text{(LL1-14.5)}$$

Na integratie is:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{b^2}{m^2 r^2}\}}} + konstante \qquad \text{(LL1-14.6)}$$

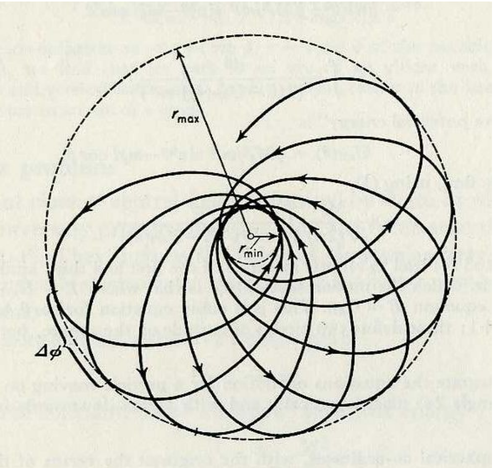


FIG. 9

Uit $b = mr^2\dot{\phi}$ volgt dat $d\phi = \frac{b}{mr^2}\,dt$, waarmee uit (LL1-14.6) de relatie $\phi(r)$ volgt:

$$\phi = \int \frac{b\,dr}{r^2 \sqrt{\{2m[E - U(r)] - \frac{b^2}{r^2}\}}} + konstante \qquad \text{(LL1-14.7)}$$

In de keerpunten van de baan is $\dot{r} = 0$, zodat deze punten kunnen worden bepaald uit (LL1-14.4) als oplossingen van

$$\frac{b^2}{2mr^2} + U(r) = E \qquad \text{(LL1-14.9)}$$

In het geval dat er 2 eindige oplossingen zijn, is de beweging begrensd tussen r_{min} en r_{max}. Gedurende een omloop waarin r, beginnend bij r_{min}, via r_{max} weer terugkomt naar r_{min}, is volgens (LL1-14.7) de voerstraal gedraaid over een hoek (zie fig. 9):

$$\boxed{\Delta\phi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{b\,dr}{r^2 \sqrt{\{2m[E - U(r)] - \frac{b^2}{r^2}\}}}} \qquad \text{(LL1-14.10)}$$

Alleen als deze hoek gelijk is aan $2\pi\frac{k}{l}$ heeft de voerstraal na l perioden k complete omwentelingen gemaakt, zodat de baancurve gesloten is. In het algemeen zal dit niet het geval zijn en treedt er per omwenteling een draaiing op van het perihelium en het apohelium. Een zuiver centraalsymmetrisch zwaartekrachtsveld met een potentiële energie die dan met $1/r$ van de straal afhangt, zoals eerder besproken, is een bijzonder geval dat leidt tot een zuivere ellipsbaan, dus $k = l = 1$ [23]. Het is echter duidelijk dat een kleine afwijking δU van de vorm $1/r$ aanleiding kan geven tot precessie van de baan.

Bij de klassieke mechanica zijn de voornaamste storingen die verantwoordelijk zijn voor de precessie van het perihelium van Mercurius (i) de werking van de zwaartekracht van de andere planeten in het zonnestelsel en, in veel mindere mate, (ii) de afplatting van de zon die een quadrupoolmoment uitoefent op Mercurius. De gemeten precessie wordt maar gedeeltelijk door deze twee effecten verklaard; het verschil kon pas later met de algemene relativiteitstheorie worden verantwoord (zie de tabel hieronder).

---

22 Zie LL1

23 Ook een afhankelijkheid met r^2 levert een gesloten baan op, maar deze relatie is hier niet van belang

Oorzaken van de precessie van het perihelium van Mercurius [24]	
Boogseconden per eeuw	**Reden**
5025.6	Precessie van de aardas [25]
531.4	Zwaartekrachtwerking van de andere planeten
0.0254	Afplatting van de zon (quadrupoolmoment)
42.98±0.04	Algemene relativiteitstheorie
5600.0	Totaal
5599.7	Waargenomen

24 Zie: http://en.wikipedia.org/wiki/Tests_of_general_relativity#Perihelion_precession_of_Mercury
25 Dit geldt alleen voor een aardse waarnemer, het effect is 360° in 25788 jaar