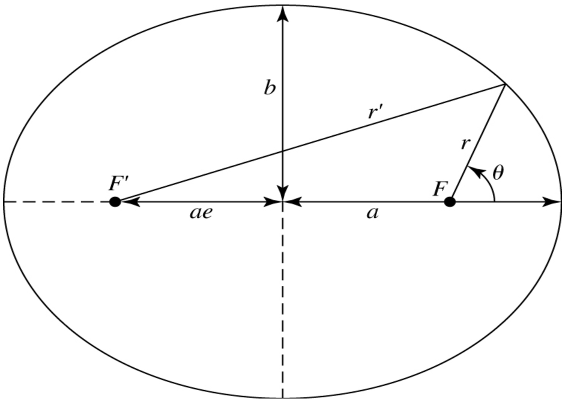
Afleiding Kepler's eerste wet, op basis van Newton's wetten

1 Inleiding

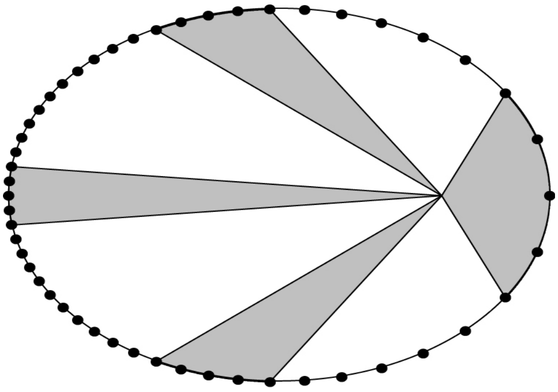
Johannes Kepler leefde van 1571 tot 1630 en was een Duitse wiskundige. Afwijkend van wat tot die tijd gedacht werd, was hij ervan overtuigd dat de zon het centrum van ons zonnestelsel is: het zogenaamde heliocentrische model. Dit model was eerder geponeerd door Copernicus (1473 – 1543). Kepler heeft een geometrisch model ontwikkeld, dat de toenmalige beste waarnemingen van de planeetbewegingen (Tycho Brahe, 1546 – 1601) verklaarde. Hij heeft daarbij drie wetten afgeleid:

- Een planeet heeft een ellipsvormige baan rond de zon, waarbij de zon in één van de brandpunten F van die ellips staat, zie figuur 1.



Figuur 1

- De lijn die de planeet met de zon verbindt beschrijft in gelijke periodes gelijke oppervlakken. Zie figuur 2.



Figuur 2

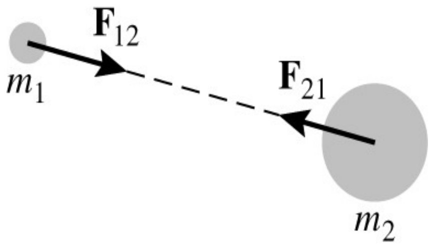
- Indien de baanperiode *P* van een planeet uitgedrukt wordt in jaren en de gemiddelde afstand *a* tot de zon in astronomische eenheden (astronomical unit = AU $\stackrel{\text{def}}{=}$ gemiddelde afstand van de aarde tot de zon), dan is het kwadraat van de baanperiode gelijk aan de gemiddelde afstand tot de derde macht: $P^2 = a^3$

Isaac Newton leefde van 1642 tot 1727 en was één van de grootste wetenschappers. In 1687 publiceerde hij Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Dit werk omvatte zijn bijdragen tot de klassieke natuurkunde onder andere op het gebied van de mechanica, zwaartekracht en calculus (o.a. de differentiaalrekening). De tweede wet van Newton luidt:

- De kracht *F* werkend op een massa *m* is gelijk aan de afgeleide van de impuls *p* van die massa naar de tijd, in vectornotatie: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

  De zwaartekracht wet van Newton houdt in:

- Twee massa's oefenen een aantrekkende kracht *F* op elkaar uit, die evenredig is met de massa's m_1 en m_2 en omgekeerd evenredig met hun afstand *r* in het kwadraat,: $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$. Hierin is *G* de zogenaamde gravitatieconstante. Zie figuur 3

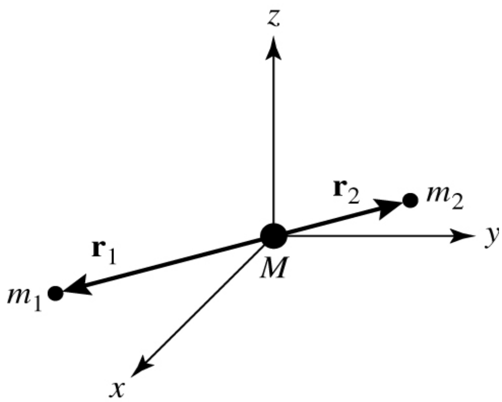


Figuur 3

De drie wetten van Kepler blijken te volgen uit de genoemde wetten van Newton. In de literatuur, onder andere in [Carrol, 2007], vindt men voor Kepler's eerste wet vaak afleidingen, die slechts indirect gebruik maken van de genoemde Newton wetten. In dit memo wordt de eerste Kepler wet afgeleid beginnend bij de Newton wetten. De afleiding geldt voor een iets algemener geval dan door Kepler beschreven. De twee massa's bewegen, onder invloed van de zwaartekracht en de tweede wet van Newton, ten opzichte van elkaar in een baan volgens een kegelsnede.

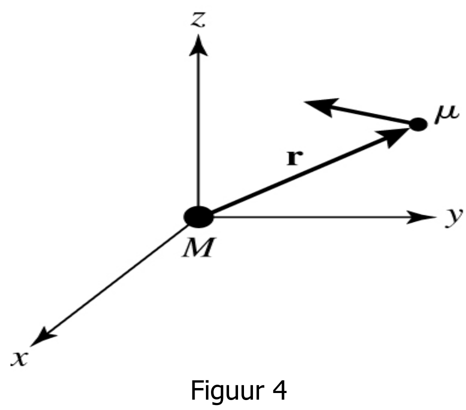
2 Model

Twee massa's m_1 en m_2 bewegen onder invloed van de gravitatiewet van Newton om hun gemeenschappelijke zwaartepunt, zie figuur 4.



Figuur 4

Dit kan vereenvoudigd worden tot een twee-massa systeem *M* en μ, waarbij de massa μ roteert om de massa *M*, zie figuur 4. De afleiding hiervan is beschreven door Carrol a.o. [2007, hoofdstuk 2, pagina's 39 – 43].



Figuur 4

Hierbij is:

$M = m_1 + m_2$ *totale massa*

$\mu = \dfrac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ *gereduceerde massa*

$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ *plaatsvector μ t.o.v. M*

$\vec{r}_1$ *plaatsvector m_1 t.o.v. gemeenschappelijke zwaartepunt* (1)

$\vec{r}_2$ *plaatsvector m_2 t.o.v. gemeenschappelijke zwaartepunt*

θ *hoek van $\vec{r}$ t.o.v. een basislijn*

$\vec{\rho}$ *éénheidsvector in $\vec{r}$ richting*

$\vec{\vartheta}$ *éénheidsvector in θ richting*

De plaats van μ ten opzichte van *M* is hiermee vastgelegd met de poolcoördinaten $\vec{r}$ en θ.

3 Afleiding op basis van de Gravitatiewet en de Tweede wet van Newton

De gravitatiewet van Newton levert de aantrekkingskracht tussen de twee massa's *M* en *μ*. De kracht op *μ* heeft de tegengestelde richting ten opzichte van $\vec{r}$ ($\equiv \vec{\rho}$) en is dus in vectornotatie:

$$\vec{F} = -\frac{G \cdot M \cdot \mu}{r^2} \cdot \vec{\rho} \qquad (2)$$

De tweede wet van Newton toegepast op massa μ:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \mu \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \mu \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (3)$$

De versnelling, van de gereduceerde massa *μ* is gelijk aan de tweede afgeleide van de plaatsvector: $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

Voor deze versnelling kan worden afgeleid [Meriam a.o., 1998, paragraaf 2.6]:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \vec{\rho} + (r \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta}) \cdot \vec{\vartheta} \qquad (4)$$

Hierin is $\ddot{r}$ de versnelling in de $\vec{\rho}$ - richting, $-r\dot{\theta}^2$ is de centripetale versnelling, $r\ddot{\theta}$ is de versnelling in de $\vec{\vartheta}$ - richting en $2 \cdot \dot{r}\dot{\theta}$ betreft de Coriolis versnelling.
Substitutie van (2) en (4) in (3) leveren de op te lossen differentiaalvergelijking:

$$-\frac{G \cdot M \cdot \mu}{r^2} \cdot \vec{\rho} = \mu \cdot \left\{ (\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \vec{\rho} + (r \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta}) \cdot \vec{\vartheta} \right\} \qquad (5)$$

Uit deze vergelijking is direct duidelijk dat de term $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ gelijk aan nul moet zijn, omdat aan de linker kant van de vergelijking geen term in de $\vec{\vartheta}$ - richting voorkomt.
We nemen aan dat de oplossing een kegelsnede is, die in poolcoördinaten beschreven kan worden met:

$$r = \frac{A}{1 + e \cdot \cos\theta} \qquad (6)$$

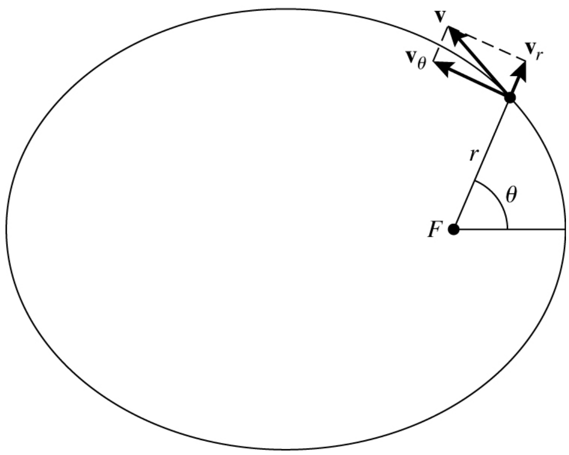
Hierin zijn *A* en *e* constanten. Met deze vergelijking kunnen zowel cirkels (*e* = 0), ellipsen (0 < *e* < 1), parabolen (e = 1) als hyperbolen (*e* >1) beschreven worden.
Deze oplossing is correct indien blijkt dat (6) een oplossing is van differentiaalvergelijking (5).

Om dat te kunnen vaststellen moeten de afgeleiden $\dot{\theta}, \dot{r}, \ddot{\theta}$ en $\ddot{r}$ uitgedrukt worden in r en θ :

- *Hoeksnelheid* $\dot{\theta}$

  De snelheid van de massa μ kan ontbonden worden in twee onderling loodrechte richtingen $\vec{v}_r$ in de $\vec{\rho}$ -richting en $\vec{v}_\theta$ loodrecht op de $\vec{\rho}$ -richting, zie figuur 5. Dan geldt: $v_\theta = r \cdot \frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta}$. Hiermee wordt:

$$\dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r} \qquad (7)$$



Figuur 5

Voor het impulsmoment van de gereduceerde massa μ geldt per definitie: $\vec{L} \overset{def}{=} \mu \times \vec{r} \times \vec{v}$. Dit impulsmoment is constant omdat de kracht $\vec{F}$ geen moment uitoefent op μ . De snelheid $\vec{v}_\theta$ staat loodrecht op $\vec{r}$ en dus is de grootte van het impulsmoment gelijk is aan:

$$L = \mu \cdot r \cdot v_\theta \qquad (8)$$

Met (7) en (8) volgt:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu \cdot r^2} \qquad (9)$$

- *Snelheid* $\dot{r}$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\left(\frac{A}{1+e\cdot\cos\theta}\right)}{dt} = \frac{dr}{dy}\cdot\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}, \textit{ waarbij:}$$

$$r = \frac{A}{y}, \quad \frac{dr}{dy} = -\frac{A}{y^2}$$

$$y = 1 + e\cdot\cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -e\cdot\sin\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu\cdot r^2} \quad \textit{ref. (9)}$$

Waarmee volgt:

$$\dot{r} = -\frac{A}{y^2}\cdot -e\cdot\sin\theta\cdot\frac{L}{\mu\cdot r^2} = \frac{L\cdot e\cdot A}{\mu\cdot r^2\cdot y^2}\cdot\sin\theta = \frac{L\cdot e}{\mu\cdot A}\cdot\sin\theta \qquad (10)$$

- *Hoekversnelling* $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\left(\frac{L}{\mu\cdot r^2}\right)}{dt} = -\frac{2\cdot L}{\mu\cdot r^3}\cdot\frac{dr}{dt}$$

Met volgt dan:

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\cdot L^2\cdot e}{\mu^2\cdot A\cdot r^3}\cdot\sin\theta \qquad (11)$$

- *Versnelling* $\ddot{r}$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\left(\frac{L\cdot e}{\mu\cdot A}\cdot\sin\theta\right)}{dt} = \frac{L\cdot e}{\mu\cdot A}\cdot\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

Met (10) volgt dan:

$$\ddot{r} = \frac{L^2\cdot e}{\mu^2\cdot r^2\cdot A}\cdot\cos\theta \qquad (12)$$

Substitueren van (9), (10), (11) en (12) in de differentiaalvergelijking (5) levert:

$$-\frac{G\cdot M\cdot\mu}{r^2}\cdot\vec{\rho} = \mu\cdot\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{L^2\cdot e}{\mu^2\cdot r^2\cdot A}\cdot\cos\theta - r\cdot\left(\frac{L}{\mu\cdot r^2}\right)^2\right]\cdot\vec{\rho} + \\ \left[r\cdot\left(-\frac{2\cdot L^2\cdot e}{\mu^2\cdot A\cdot r^3}\cdot\sin\theta\right) + 2\cdot\left(\frac{L\cdot e}{\mu\cdot A}\cdot\sin\theta\right)\cdot\left(\frac{L}{\mu\cdot r^2}\right)\right]\cdot\vec{\vartheta}\end{array}\right\}$$

De $\vec{\vartheta}$ term in het rechter lid blijkt inderdaad gelijk aan nul te zijn. Na vereenvoudiging is de resterende vergelijking:

$$-G\cdot M = \left(\frac{L^2\cdot e}{\mu^2\cdot A}\cdot\cos\theta - \frac{L^2}{r\cdot\mu^2}\right) \qquad (13)$$

Hieruit volgt:

$$\frac{1}{r} = \frac{G\cdot M\cdot\mu^2}{L^2} + \frac{e}{A}\cdot\cos\theta,\ \textit{of ook:}$$

$$r = \frac{L^2/(G\cdot M\cdot\mu^2)}{1 + \frac{L^2/(G\cdot M\cdot\mu^2)}{A}\cdot e\cdot\cos\theta}$$

Vergelijking van dit resultaat met (6) toont aan dat de constante *A* blijkbaar gelijk is aan $L^2/(G\cdot M\mu^2)$.
Hiermee volgt:

$$r = \frac{L^2/(G \cdot M \cdot \mu^2)}{1 + e \cdot \cos\theta} \qquad (14)$$

Dit is dezelfde vorm als die van een kegelsnede volgens (6). Blijkbaar is de oplossing van differentiaalvergelijking (5) inderdaad een kegelsnede.

Het is nu ook mogelijk om de grootte van het impulsmoment te bepalen, immers voor een ellips geldt als vergelijking:

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos\theta} \qquad (15)$$

, waarbij:

$a =$ *halve hoofdas*

$e =$ *excentriciteit van de ellips*

Waarmee voor het impulsmoment volgt:

$$L = \mu \cdot \sqrt{G \cdot M \cdot a \cdot (1 - e^2)} \qquad (16)$$

Voor parabolische of hyperbolische banen gelden gelijksoortige relaties.

4 Referenties

Carrol a.o., 2007

B.W. Carroll and D.A. Ostlie: *"An introduction to Modern Astrophysics",* Second Edition, Pearson, Addison Wesley, ISBN 0-8053-0402-9.

Meriam a.o., 1998

J.L.Meriam and L.G. Kraige: "*Engineering Mechanics, volume 2, Dynamics*", Fourth Edition, John Wiley & Sons, ISBN 0-471-24167-9.