De Speciale Relativiteits Theorie (SRT) en Klok- en Tweelingparadox

Metius Werkgroep Theoretische Weer- en Sterrenkunde

Juli 2010

Inhoud

Inleiding

- Gebruikte literatuur:
  - [Einstein, 1916], "Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie", 1916, A. Einstein
  - [Einstein, 1918], "Dialog über Einwände gegen die Relativitätstheorie", Die Naturwissenschaften; jaargang 6, november 1918, A. Einstein
  - [Icke, 2005], "Niks relatief", 2005, V. Icke
  - [Carroll a.o., 2007], "An Introduction to Modern Astrophysics", 2007, Bradley W. Carroll en Dale A. Ostlie, ISBN 0-8053-0402-9
  - [Lawden, 2002], "Intoduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology", D.F. Lawden , ISBN 0-486-42540-1
  - [Landau a.o.,2005], "Course of Theoretical Physics, volume 2", 2005, L.D. Landau, E.M. Lifshitz, ISBN 0-7506-278-9
- Einstein [1918], Lawden [2002] en Landau [2005] behandelen de paradoxen expliciet

SRT - postulaten

- Alle natuurwetten zijn dezelfde in alle inertiaal-systemen
- De lichtsnelheid is voor iedere waarnemer dezelfde, onafhankelijk van zijn snelheid t.o.v. de bron

Lorentztransformatie [Einstein, 1916]

- Beschouw een met snelheid *u* bewegend inertiaalsysteem S′ t.o.v. een ander inertiaalsysteem S
- Een gebeurtenis wordt in S vastgelegd met plaats *x* en tijdstip *t*. Diezelfde gebeurtenis wordt in S′ vastgelegd met *x′* en *t′*
- Op tijdstip $t=0$ bevindt de oorsprong van S′ zich in de oorsprong van S. Voor de oorsprong van S′ geldt dus $x_{s'} = u \cdot t$
- Het verband tussen *x′*, *t′* en *x*, *t* volgt uit de Lorentz transformatie (*c* = lichtsnelheid):

$$x' = \frac{x - u \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad en \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Vereenvoudigde schrijfwijze Lorentz transformatie [Icke, 1975]

- Voer in dimensieloze grootheden: relatieve snelheid β en Lorentz factor γ:

$$\beta \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{c}} \quad en \quad \gamma \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}^2}{\mathbf{c}^2}}}$$

- Lorentz transformatie wordt dan:

$$x' = (x - \beta \cdot c \cdot t) \cdot \gamma \quad en \quad t' = (t - \frac{\beta}{c} \cdot x) \cdot \gamma$$

- Het verband tussen γ en β is:

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}$$

- NB1 $\beta<1$ and $\gamma>1$ en zijn constanten voor een gegeven snelheid *u*
- Latere voorbeelden gelden voor $u = 0.6 \cdot c$, dus $\beta = 0.6$ en $\gamma = 1.25$

SRT – tijddilatatie [Einstein, 1916]

- Beschouw een klok in S′ op plaats $x' = 0$. Die klok geeft twee tikken op $t_1' = 0$ en $t_2' = \Delta t'$
- Met de Lorentz transformatie kan voor die twee gebeurtenissen de tijdstippen t_1 en t_2 in S bepaald worden:

$$x' = (x - \beta \cdot c \cdot t) \cdot \gamma \quad (1) \quad en \quad t' = \left(t - \frac{\beta}{c} \cdot x\right) \cdot \gamma \quad (2)$$

$$(1)\ en\ x' = 0\ geven\ x = \beta \cdot c \cdot t\ en\ dan\ volgt\ uit\ (2):$$

$$t = \frac{c \cdot t'}{(1 - \beta^2) \cdot c \cdot \gamma}\ en\ daarmee\ volgt\ voor\ t_1' = 0\ en\ t_2' = \Delta t'$$

$$t_1 = 0\ en\ t_2 = \frac{\Delta t'}{(1 - \beta^2) \cdot \gamma} = \gamma \cdot \Delta t'\quad ofwel\quad \Delta t' = \frac{t_2 - t_1}{\gamma} = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

SRT – tijddilatatie (2)

- Voor een waarnemer lopen de klokken in een t.o.v. hem met snelheid *u* bewegend systeem een factor $1/\gamma$ langzamer: $\Delta t' = \Delta t/\gamma$
- De tijd t' waargenomen in het bewegende systeem noemt men de "eigen tijd" *(proper time)*
- Voor $u = 0.6 \cdot c$

$$\beta = 0.6 \textit{ levert: } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1.25$$

- 1 uur in het bewegende systeem wordt door de niet-bewegende waarnemer ervaren als 1.25 uur
- In het bewegende system ervaart men die tijd als natuurlijk

Bewegende klokken lopen langzamer

SRT - lengtecontractie [Einstein, 1916]

- Beschouw een met S′ meebewegende lengte *L′* van $x'_1 = 0$ tot $x'_2 = L'$
- Met de Lorentz transformatie kunnen op een tijdstip *t* de coördinaten x_1 en x_2 en daarmee de lengte *L* in S bepaald worden. Kies $t = 0$

$$x' = (x - \beta \cdot c \cdot t) \cdot \gamma \quad (1) \quad en \quad t' = (t - \frac{\beta}{c} \cdot x) \cdot \gamma \quad (2)$$

$$(1)\ en\ t = 0\ \ geeft\ \ x = \frac{x'}{\gamma}\ \ en\ dus:$$

$$x_1 = 0\ en\ x_2 = \frac{L'}{\gamma}$$

- Voor een waarnemer wordt een lengte L in een t.o.v. hem met snelheid *u* bewegend systeem een factor $1/\gamma$ korter: $L = L'/\gamma$
- De lengte *L′* zoals waargenomen in het bewegende systeem noemt men de *"proper length"*

Bewegende lengtes worden in de bewegingsrichting korter

Gelijktijdigheid

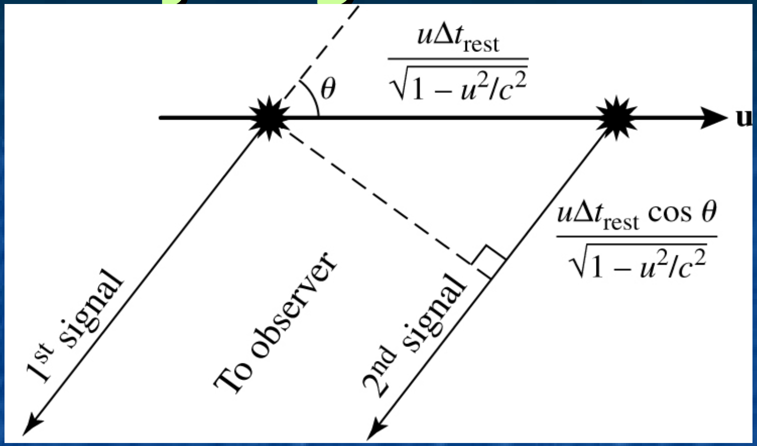
- In het systeem S vinden op hetzelfde tijdstip $t=0$ twee gebeurtenissen plaats op $x_1 = 0$ en $x_2 = L$

Hoe wordt dat waargenomen in het systeem S'?

- Toepassen van de Lorentz transformatie levert dat de gebeurtenissen in S' plaatsvinden op de tijdstippen:
  - $t_1' = (t - u \cdot x_1/c^2) \cdot \gamma = 0$
  - $t_2' = (t - u \cdot x_2/c^2) \cdot \gamma = -(u \cdot L/c^2) \cdot \gamma$
- In S' vinden de twee gebeurtenissen dus niet gelijktijdig plaats, maar vindt de gebeurtenis t.p.v. x_2 eerder plaats dan t.p.v. x_1

Gelijktijdigheid is een relatief begrip

Waarnemen bij hoge snelheden [Carroll a.o., 2007]



- Beschouw een lichtbron die met snelheid u t.o.v. een waarnemer beweegt (zie figuur). Signalen worden uitgezonden met een interval Δt_{rest}
- Het interval tussen de ontvangst van twee signalen door de waarnemer Δt_{obs} wordt bepaald door zowel tijddilatatie als de extra tijd benodigd voor het lichtsignaal om de toegenomen afstand tussen lichtbron en waarnemer af te leggen
- De tijd tussen verzending van twee signalen volgens de waarnemer is a.g.v. tijddilatatie: $\gamma \cdot \Delta t_{rest}$
- De afstand die het licht extra moet afleggen in die periode is: $\gamma \cdot \Delta t_{rest} \cdot u \cdot \cos\theta$ Hiervoor is een periode nodig van: $\gamma \cdot \Delta t_{rest} \cdot (u/c) \cdot \cos\theta$
- Hiermee wordt $\Delta t_{obs} = \gamma \cdot \Delta t_{rest} [1+(u/c) \cdot \cos\theta] = \gamma \cdot \Delta t_{rest} (1+\beta \cdot \cos\theta)$

Een voorbeeld

Een ruimtereiziger gaat met een snelheid van $0.6 \cdot c$ (dat is dus een snelheid van 0.6 lichtjaar per jaar) van de aarde naar een ster op een afstand van 3 lichtjaar. Aan het begin van de reis staan de klokken van de reiziger, de aardse waarnemer en op de ster op $t'_{(reiziger)} =$

$t_{(aarde\ en\ ster)} = 0$

Wat "ziet" de waarnemer op aarde?

Op tijdstip $t = 3/0.6 = 5$ jaar wordt de ster bereikt; de klok van de reiziger geeft dan, a.g.v. de tijddilatatie, echter maar $5/1.25 = 4$ jaar aan

Wat neemt de reiziger waar?

De lengtecontractie maakt de af te leggen afstand: $3/1.25 = 2.4$ lichtjaar. Op tijdstip $t' = 2.4/0.6 = 4$ jaar wordt de ster bereikt

Klokparadox

- Voor de waarnemer op aarde beweegt de reiziger en dus concludeert de aardse waarnemer:

  de klok van de reiziger loopt langzamer dan op aarde

- Voor de reiziger beweegt de aarde en dus concludeert hij:

  de klok op aarde loopt langzamer dan mijn klok

Is dit een strijdigheid of is dit mogelijk?

Tweelingparadox

- A en R zijn een tweeling
- A blijft op aarde
- R reist heen en terug naar een ster op 3 lichtjaar afstand, met snelheid *0.6·c*
- A op aarde is in die periode *2*3/0.6 = 10* jaar ouder geworden A.g.v. tijddilatatie loopt R's klok langzamer en A verwacht dat R slechts *10/1.25 = 8* jaar ouder is geworden
- R ervaart door lengtecontractie een af te leggen afstand van *2*3/1.25 = 4.8* lichtjaar en wordt dus *4.8/0.6 = 8* jaar ouder. R ziet A's klok a.g.v. tijddilatatie langzamer lopen
- A verwacht dat R, na diens reis, jonger is dan hijzelf
- R verwacht precies het omgekeerde en verwacht dat A bij aankomst jonger is dan hijzelf

Wie heeft gelijk?

Oplossing Klokparadox

Landau a.o. [2005] zeggen, voor een waarnemer in S kijkend naar het bewegende systeem S', hierover het volgende:

"At a certain moment the clock in S' passes by a clock in S, and at that moment the readings of the clocks coincide. To compare the rates of clocks in S and S' we must compare the readings of the moving clock in S' with the clocks in S. But now we compare this clock (in S') with different clocks in S , with those past which the clock in S' goes at this new time. We see that to compare the rates of clocks in two reference frames we require several clocks in one frame (S) and one in the other (S'), and that therefore this process is not symmetric with respect to the two systems. The clock that appears to lag is always the one which is being compared with different clocks in the other system"

Oplossing Klokparadox (2)

Het volgende dient dus onderkend te worden ([Landau a.o., 2005] en [Lawden, 2002]):

- Vergelijking van klokken op verschillende plaatsen in de ruimte is niet mogelijk
- Men kan alleen klokken vergelijken die op het moment van vergelijking op dezelfde plaats in de ruimte zijn
- De stilstaande waarnemer vergelijkt de met de reiziger meebewegende klok met een stilstaande klok die zich op het moment van vergelijken op dezelfde plaats bevindt als de klok van de reiziger

Dus dezelfde bewegende klok wordt steeds vergeleken met een andere stilstaande klok

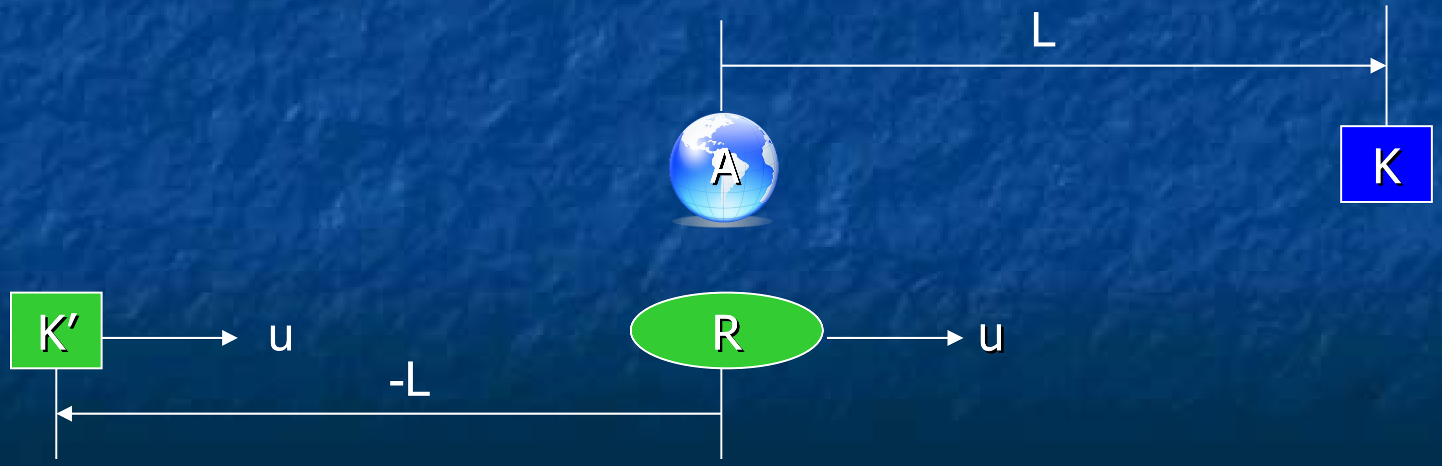
Klokparadox (bewegende reiziger)

Aarde A en klok K bewegen niet en geven beide de aardse tijd *t* aan; klok K staat op een afstand L van de aarde; dit betreft het inertiaal systeem S

Reiziger R en klok K' verplaatsen zich met snelheid *u* en geven beide de R-tijd *t'*; klok K' staat op afstand –L van de reiziger; dit betreft het inertiaalsysteem S'

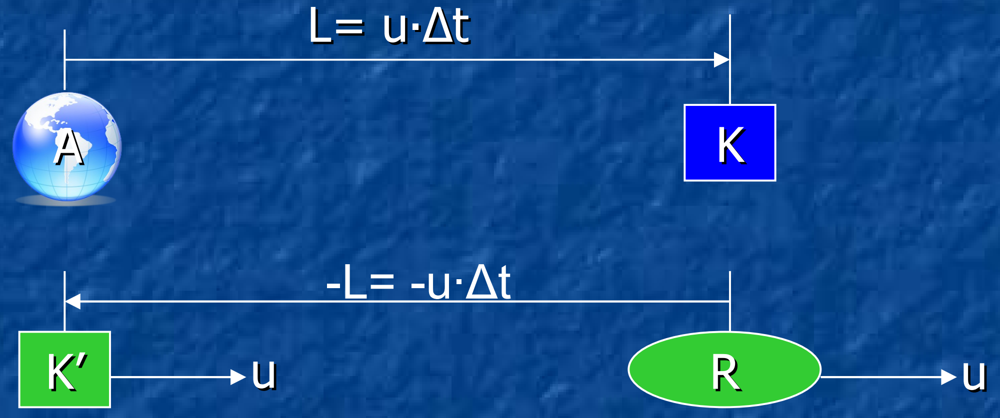
Beginsituatie:

- Aarde: $t = 0$, $x = 0$; klok K: $t = 0$, $x = L$
- Reiziger: $t' = 0$, $x' = 0$; klok K': $t' = 0$, $x' = -L$



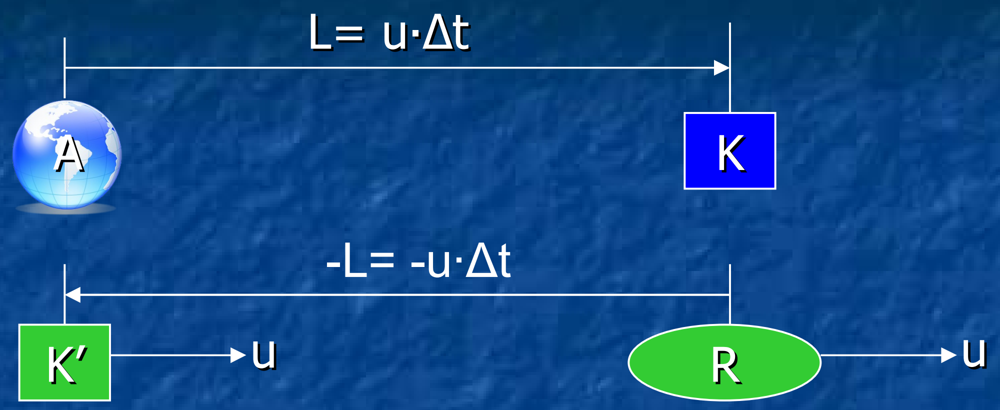
Klokparadox (bewegende reiziger, 2)

Na een periode Δt hebben de reiziger R en klok K′ de afstand L afgelegd



- Op aarde vergelijkt men nu stilstaande klok K, met aardse tijd $t = \Delta t$ en locatie $x = u \cdot \Delta t$, met de klok van R
- De tijd van klok K wordt door de bewegende reiziger R geregistreerd als: $t' = (t - u \cdot x/c^2) \cdot \gamma = (\Delta t - u \cdot u \cdot \Delta t/c^2) \cdot \gamma = \Delta t \cdot (1 - u^2/c^2) \cdot \gamma = \Delta t/\gamma$ dus: $\Delta t' = \Delta t/\gamma$
- Conclusie: volgens aarde loopt de klok van R een factor $1/\gamma$ langzamer dan de aardse klokken A en K

Klokparadox (bewegende reiziger, 3)



R vergelijkt klok op aarde met klok K′

- Aarde: $t = \Delta t$, $x = 0$
- Deze tijd converteren naar Reiziger:

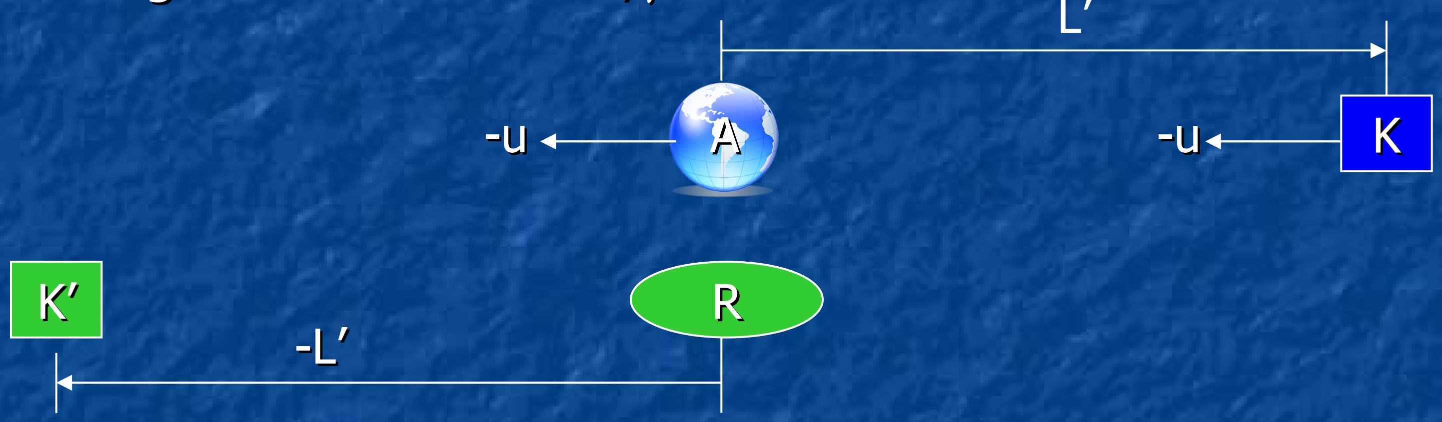
  $t' = (t - u \cdot x/c^2) \cdot \gamma$, met $t = \Delta t$ en $x = 0$ volgt: $t' = \gamma \cdot \Delta t$ ofwel $\Delta t = \Delta t' / \gamma$
- Conclusie: volgens R loopt de aardse klok een factor $1/\gamma$ langzamer dan de eigen klok

Klokparadox (bewegende aarde)

- De voorgaande beschouwing kan ook gedaan worden in de veronderstelling dat de aarde en klok K bewegen met snelheid *–u* en dat de reiziger en klok K′ stil staan

Beginsituatie: Aarde: $t = 0$, $x = 0$; Reiziger: $t' = 0$, $x' = 0$

A.g.v. lengtecontractie: $L' = L/\gamma$

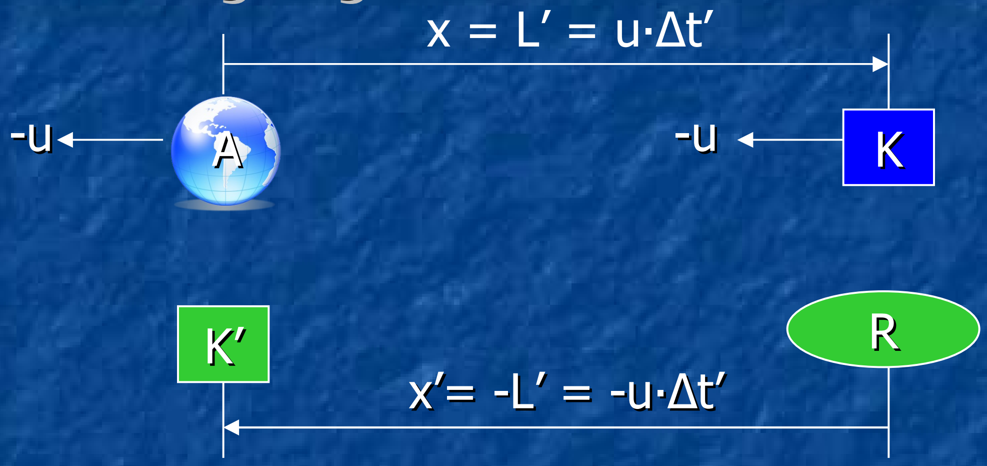


- Nu moet de tijd *t′* van de reiziger geconverteerd worden naar de aardse tijd *t*. Dit betreft dus de “omgekeerde” Lorentz transformatie:

$$t = (t' + \frac{\beta}{c} \cdot x') \cdot \gamma = (t' + \frac{u \cdot x'}{c^2}) \cdot \gamma$$

Klokparadox (bewegende aarde, 2)

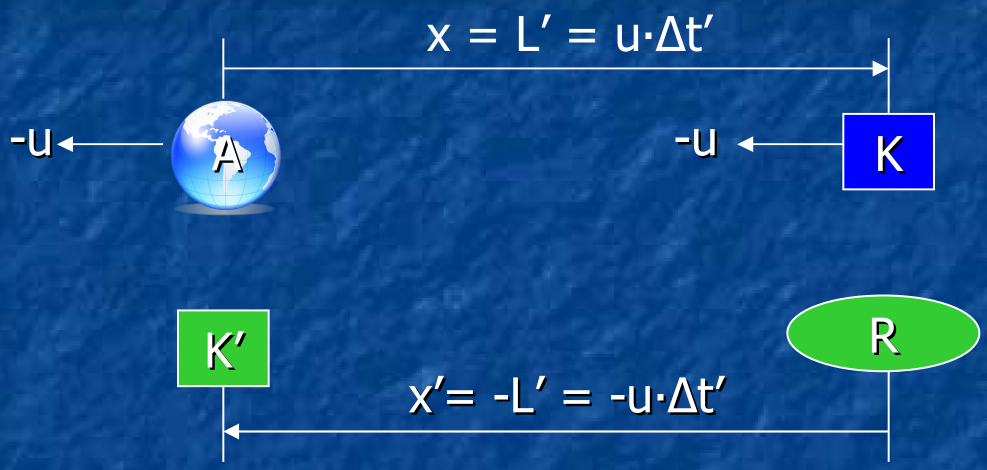
Na periode $\Delta t'$ hebben de aarde en klok K de afstand L' afgelegd



- R vergelijkt nu stilstaande klok K′: $t' = \Delta t'$ en $x' = -u \cdot \Delta t'$ met de klok op aarde
- De tijd van klok K′ omzetten naar aardse tijd:

  $t = (t' + u \cdot x'/c^2) \cdot \gamma = (\Delta t' - u \cdot u \cdot \Delta t'/c^2) \cdot \gamma = \Delta t' \cdot (1 - u^2/c^2) \cdot \gamma = \Delta t'/\gamma$ dus: $\Delta t = \Delta t'/\gamma$
- Conclusie: volgens R loopt de klok op aarde een factor $1/\gamma$ langzamer dan de eigen klok

Klokparadox (bewegende aarde, 3)



Aarde vergelijkt klok van R met klok K

- Klok R: $t' = \Delta t'$, $x' = 0$
- Deze tijd converteren naar aardse tijd:
  $t = (t' + u \cdot x'/c^2) \cdot \gamma$, met $t' = \Delta t'$ en $x' = 0$ volgt: $t = \gamma \cdot \Delta t'$ ofwel $\Delta t' = \Delta t / \gamma$
- Conclusie: volgens aarde loopt de klok van de reiziger een factor $1/\gamma$ langzamer dan de eigen klok

Klokparadox – conclusies

- Zowel op aarde als de reiziger concluderen dat de (bewegende) klok van de ander langzamer loopt dan de eigen klok
- Dat lijken strijdige uitspraken, maar:
- Toch blijken beide uitspraken waar te zijn, onder de voorwaarde dat men alleen klokken vergelijkt die op dezelfde plaats zijn
- De paradox wordt opgelost doordat gelijklopende maar op verschillende plaatsen in een bewegend systeem staande klokken voor de stilstaande waarnemer verschillende tijden aangeven

Er is dus sprake van een schijnbare strijdigheid oftewel een paradox

Oplossing Tweelingparadox

- De paradox komt voort uit de gedachte dat A en R verwisselbaar zijn. Dat is niet waar: A ondergaat geen versnellingen en R moet om terug te keren vertragen en weer versnellen. R bevindt zich dus niet altijd in een inertiaal-systeem
- SRT geldt voor inertiaal-systemen en zou dus geen oplossing geven voor dit probleem
- Maar met een truc lukt het wel:
  - Op $t=0$ op aarde komt ruimteschip S1 langs met constante snelheid $v=0.6\cdot c$. R gaat hierin mee, tot de gele ster op een afstand van 3 lichtjaar.
  - Tegelijkertijd passeert ruimteschip S2 met constante snelheid $v=-0.6\cdot c$ een rode ster op een afstand van 6 lichtjaar van de aarde A
  - Bij aankomst van S1 bij de gele ster komt ook precies S2 daar aan. Reiziger R stapt over van S1 in S2 en reist daarmee terug naar de aarde A
  - De ruimteschepen S1 en S2 hebben een constante snelheid en zijn inertiaalsystemen

Oplossing (2)

- Bij het begin van de reizen van S1 en S2 zetten we alle klokken op aarde A en de sterren gelijk $t = 0$, alsmede op beide ruimteschepen S1 en S2 $t' = t'' = 0$
- De aarde en de sterren vormen een (stilstaand) inertiaalsysteem
- De ruimteschepen S1 en S2 zijn ook inertiaalsystemen
- De aarde zendt elk jaar één tijdpuls, dus op $t = 0, 1, 2, 3, \ldots..10$ jaar
- Het ruimteschip S1 zendt gedurende de heenreis van R ieder jaar één tijdpuls, dus op $t' = 0, 1, 2, 3$ *en* 4 jaar
- Het ruimteschip S2 zendt gedurende de terugreis van R ook ieder jaar één tijdpuls, dus op $t'' = 4, 5, 6, 7$ *en* 8 jaar
- De pulsen op $t' = t'' = 4$ jaar worden dus tegelijkertijd uitgezonden, terwijl beide ruimteschepen S1 en S2 bij de gele ster zijn

Oplossing (3)

- Welke signalen ontvangt men op aarde?
  - Van ruimteschip S1:
    - Het ruimteschip verwijdert zich van de aarde met $u = 0.6\ c,\ \theta = 0$
    - Het waargenomen interval tussen ontvangst van 2 signalen is: $\Delta t_{obs} = \gamma \cdot \Delta t_{rest}\,[1+(u/c)\cdot\cos\theta] = 1.25\cdot 1\cdot[1+0.6\cos 0] = 2$ jaar
    - Men ontvangt op aarde van S1 van 4 signalen ($t = 0$ niet meegerekend) op $t = 2, 4, 6, 8$ jaar
  - Van ruimteschip S2:
    - Het ruimteschip nadert de aarde met $u = -0.6\ c,\ \theta = 0$
    - Het waargenomen interval tussen ontvangst van 2 signalen is: $\Delta t_{obs} = \gamma \cdot \Delta t_{rest}\,[1+(u/c)\cdot\cos\theta] = 1.25\cdot 1\cdot[1- 0.6\cos 0] = 0.5$ jaar
    - Het eerste signaal uitgezonden op $t'' = 4$ jaar (overeenkomend op aarde met $t = 5$ jaar) ontvangt men op $t = 5 + 3$ *lichtjaar /1 lichtjaar/jaar* $= 8$ jaar (dit signaal valt dus samen met het laatste signaal van S1)
    - Men ontvangt dus op aarde van S2: 4 signalen ($t'' = 4$ niet meegerekend) op $t = 8.5, 9, 9.5, 10$ jaar
  - Conclusie:
    - Op aarde ontvangt men 4 signalen van S1 en 4 signalen van S2; derhalve is R gedurende de hele reis 8 jaar ouder geworden, terwijl er op aarde 10 jaar verlopen zijn

Oplossing (4)

- Welke signalen ontvangt men op de ruimteschepen?
  - Op ruimteschip S1 van de aarde:
    - De aarde verwijdert zich van het ruimteschip met $u = 0.6\ c,\ \theta = 0$
    - Het waargenomen interval tussen ontvangst van 2 signalen is: $\Delta t_{obs} = \gamma \cdot \Delta t_{rest}\,[1+(u/c)\cdot \cos\theta] = 1.25 \cdot 1 \cdot [1+0.6\cos 0] = 2$ jaar
    - Tijdens de heenreis van R (van aarde naar gele ster) ontvangt men (het signaal $t = 0$ niet meegerekend) slechts 2 signalen op $t' = 2$ *en* 4 jaar
  - Op ruimteschip S2 van de aarde:
    - Het ruimteschip nadert de aarde met $u = -0.6\ c,\ \theta = 0$
    - Het waargenomen interval tussen ontvangst van 2 signalen is: $\Delta t_{obs} = \gamma \cdot \Delta t_{rest}\,[1+(u/c)\cdot \cos\theta] = 1.25 \cdot 1 \cdot [1- 0.6\cos 0] = 0.5$ jaar
    - Op t″ = t′ = 4 jaar zijn zowel S2 als S1 bij de gele ster en ontvangen beide ruimteschepen tegelijkertijd het tweede signaal van de aarde
    - Gedurende de verdere terugreis ontvangt S2 dus gedurende 4 jaar nog 8 signalen van de aarde op $t'' = 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5, 8$ jaar
  - Conclusie:
    - Reiziger R en ook ruimteschip S2 ontvangen dus 10 signalen van de aarde; derhalve moeten er op aarde gedurende de hele reis 10 jaar verlopen zijn, terwijl er op de ruimteschepen slechts 8 jaar verlopen zijn

Oplossing (5)

- Blijkbaar is er nu geen misverstand meer over de tijd verlopen op aarde en de ruimteschepen
- Zowel op aarde als op de ruimteschepen is men het er over eens dat men op aarde 10 jaar ouder is geworden en op de ruimteschepen slechts 8 jaar

Wat was er mis?

- Het omkeren van een stilstaand universum en een bewegend ruimteschip naar een bewegend universum en een stilstaand ruimteschip is niet zonder meer toegestaan [Einstein, 1918]
- De twee genoemde inertiaalsystemen zijn niet gelijkwaardig
- Het laatst genoemde inzicht is vaak onbekend; het blijkt moeilijk om dit inzicht ruime bekendheid te geven

Waarom zijn de twee inertiaal-systemen niet gelijkwaardig? [Einstein, 1918]

- Einstein kon de verklaring pas geven na de beschrijving van de Algemene Relativiteits Theorie (ART)
- Bewegend ruimteschip: Om in die situatie te komen (en later weer terug te keren tot stilstand) is er een versnellende/vertragende kracht op het ruimteschip nodig
- Bewegend universum: er is een homogeen zwaartekrachtveld nodig om dat te versnellen/vertragen en daarnaast een compenserende kracht op het ruimteschip om niet te gaan bewegen
- Met de ART is het mogelijk om met de invloed van de zwaartekracht op de tijd, beide systemen in elkaar om te rekenen. Maar in SRT gaat dat dus niet

Conclusies

- Er is geen tegenstrijdigheid, indien men de SRT goed toepast
- De misvatting lijkt onuitroeibaar; in 1918 beschrijft Einstein al hoe het in elkaar zit

Er is inderdaad sprake van een paradox, een schijnbare tegenstrijdigheid